Федеральное агентство воздушного транспорта (Росавиация)

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный

университет гражданской авиации»

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Методические указания по выполнению самостоятельных работ

Для студентов всех факультетов



Санкт-Петербург

2018

Одобрено и рекомендовано к изданию

Учебно-методическим советом Университета

Ш 87(03)

**Дифференциальные уравнения.** : Методические указания по выполнению самостоятельных работ / Университет ГА. С.-Петербург, 2018.

Издаются в соответствии с программой дисциплины «Дифференциальные уравнения».

Предназначены для студентов всех факультетов.

Составитель: А.А. Скляренко, ст. преп.

Рецензент: Э. Н. Береславский, доктор физ.-мат. наук, проф.

© Университет гражданской авиации, 2018

**Общие методические указания.**

Методические указания издаются в помощь по изучению дисциплины.

Цель: углубление знаний по разделу «Дифференциальные уравнения» и отработка практических навыков решения задач.

Каждая тема методического пособия содержит теоретический и практический материал (примеры с алгоритмами решений) и задачи для закрепления (домашнее задание) по изучаемой теме.

Данные методические указания могут использоваться как для аудиторной так и внеаудиторной работы студентов.

**1. Уравнения первого порядка**

***1.1. Уравнения с разделяющимися переменными*.**

Общий вид уравнения с разделяющимися переменными:

В силу равенства уравнения можно переписать в виде:

 , т.е. можно отделить переменные. Если обозначить какие-либо первообразные функций и соответственно через G(y) и F(x) (их легко найти путем интегрирования), то уравнение примет вид:

 *dG(y) = dF(x)*, или *d[G(y) – F(x)] = 0*. Отсюда *G(y) – F(x) = С*, или *G(y) = F(x)* *+ С*. Это общий интеграл данного уравнения, т.е. общее решение в неявном виде. Таким образом, решение уравнения с разделяющимися переменными сводится к разделению переменных и их почленному интегрированию. Если общий интеграл удается разрешить относительно y, то получим общее решение в явном виде .

*Пример 1*. Решим задачу Коши

,

 т.е. найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее условию . Это уравнение с разделяющимися переменным. Отделим переменные, разделив его почленно на . Получим Интегрируя почленно, найдем , или . Это общий интеграл уравнения. Если обозначить произвольную постоянную через lnC и проэкспонировать равенство, то оно примет вид , или . Это общее решение уравнения. Для нахождения искомого частного решения подставим сюда начальные условия Получим . Отсюда . При таком выборе С из общего решения выделяется искомое частное

***I.2 Линейные уравнения*.**

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и её производной. Его общий вид:

*. (2)*

Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций . Тогда одну из них (например, ), можно выбрать любой (не равной нулю), а другая определится из уравнения *(2)*. Так как , то после подстановки в *(2)* получим . Положим что: . Тогда . Для функций *u* и получили уравнения с разделяющимися переменными. Очевидно, *.* Полагая *С = 0* и понимая под какую-нибудь одну первообразную функции *Р* (это допустимо, так как в качестве можно взять любое частное решение уравнения + p = 0), найдем = .

Зная *v*, легко найти *u* , проинтегрировав уравнение *du =*  Отсюда *u* = Следовательно, общее решение уравнения (2) имеет вид

*Пример 2*. Найдем общее решение уравнения . Это линейное уравнение первого порядка. Полагая , , после подстановки в уравнение получим *u*' + *u*( + *3x2*) =. Приравняв выражение в скобках к нулю, найдем d/ = – 3x2dx, ln = – x3, = Следовательно, =, т.е. и Применив формулу интегрирования по частям, получим Общее решение данного уравнения имеет вид .

***I.3 Уравнение Бернулли*.**

Изложенный метод применим и к решению линейного обобщенного уравнения (уравнения Бернулли). Его общий вид

 *(3)*

При уравнение (3) – линейное, при – уравнение с разделяющимися переменными.

Полагая *y=u* , найдем . Для определения функций *u* и получим, как и при решении линейного уравнения, уравнения с разделяющими переменными *’+p=0 и .*

*Пример 3.* Найдем общее решение уравнения . Это уравнение Бернулли (). Полагая *y=uv*, получим . Из равенства  найдем Следовательно Общее решение данного уравнения имеет вид .

Заметим, что иногда целесообразно в общий интеграл уравнения для функции u подставить вместо u выражение , где *v* – найденная ранее функция. Тогда получим не общее решение уравнения Бернулли (как в нашем примере), а его общий интеграл.

***1.4 Однородные уравнения.***

Однородным называется уравнение, допускающее приведение к виду:

 (4)

Введение вместо *y* новой искомой функции  приводит (4) к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, так как , то  Подставляя эти выражения в (4), получим , или . Интегрируя это равенство почленно, найдем , или , где - одна из первообразных функции . Получили общий интеграл данного уравнения.

Заметим, что функция двух переменных называется однородной функцией степени m, если  Правая часть уравнения (4) есть однородная функция нулевой степени, так как  Очевидно, к виду (4) можно привести уравнение , где P и Q – однородный функции одной степени m. Для этого достаточно разделить уравнение почленно на  и разрешить его относительно.

*Пример 4*. Проинтегрируем уравнение .

Это однородное уравнение первого порядка. Его можно привести к виду (4), так как коэффициенты при  и  являются однородными функциями второй степени. Разделив уравнение почленно на , получим . Полагая , перепишем уравнение в виде , или . Отсюда . Следовательно, , или , , , . Полагая здесь , получим общий интеграл данного уравнения .

**2. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.**

***2.1 Простейшие уравнения.***

Простейшее уравнение n-го порядка имеет вид . (5)

Так как , то уравнение (5) можно переписать в виде , откуда . Получили простейшее уравнение -го порядка. В результате  последовательных интегрирований найдем общее решение данного уравнения.

*Пример 5.* Проинтегрируем уравнение . Очевидно, это простейшее уравнение. Так как , то , . Интегрируя по частям, найдем  или . Отсюда 

Еще раз интегрируя по частям, получим общее решение уравнения .

* 1. ***Уравнения, содержащие только аргумент и две старшие производные.***

Общий вид уравнения порядка указанного типа . (6)

Полагая , получим , и уравнение (6) примет вид  Это уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, найдем , т.е. .

Полученное уравнение  -го порядка – простейшее.

*Пример 6*. Найдем общее решение уравнения . Это уравнение третьего порядка, содержащее только аргумент и две старшие производные. Полагая , получим , , . Отсюда , . Следовательно, . Интегрируя это простейшее уравнение второго порядка, найдем , , т.е.  - общее решение уравнения .

* 1. ***Уравнения второго порядка, не содержащие аргумент.***

Общий вид уравнения второго порядка, не содержащего явным образом аргумент:

 . (7)

Порядок уравнения (7) можно понизить за счет введения новой независимой переменной y (вместо x ) и новой искомой функции z(y) (вместо y) по формуле 𝑧=𝑦′. Тогда 𝑦′′=𝑧′=𝑑𝑧𝑑𝑥=𝑑𝑧𝑑𝑦∗𝑑𝑦𝑑𝑥=𝑧𝑦′∗𝑧 и уравнение (7) примет вид 𝐹(𝑦,𝑧,𝑧𝑦′∗𝑦)=0. Это уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, найдем 𝑧=𝜑(𝑦, 𝐶1), т.е. 𝑦′=𝜑(𝑦, 𝐶1). Отсюда 𝑑𝑦𝜑(𝑦, 𝐶1)=𝑑𝑥,∫𝑑𝑦𝜑(𝑦, 𝐶1)=𝑥+𝐶2, или Φ(𝑦, 𝐶1)=𝑥+𝐶2. Это общий интеграл уравнения (7). Здесь Φ(𝑦, 𝐶1) – одна из первообразных функций 1𝜑(𝑦, 𝐶1).

*Пример 7.* Найдем частное решение уравнений 𝑦′′𝑡𝑔(𝑦)=2(𝑦′)2, удовлетворяющее условием 𝑦(2)=𝜋/2, 𝑦′(2)=1. Это уравнение второго порядка, не содержащее аргумент. Полагая 𝑧=𝑦′, так что 𝑦′′=𝑧′∗𝑦′=𝑧′∗𝑧, получим 𝑧′𝑧𝑡𝑔(𝑦)=2𝑧2, или 𝑧(𝑧′𝑡𝑔(𝑦)−2𝑧)=0. Отсюда любо 𝑧=0, либо 𝑧′𝑡𝑔(𝑦)−2𝑧=0. Из первого уравнения следует 𝑦′=0, т.е. 𝑦=𝐶, а из второго: 𝑑𝑧/𝑧=2𝑐𝑡𝑔(𝑦)𝑑𝑦, т.е. 𝑙𝑛𝑧=2𝑙𝑛(𝑠𝑖𝑛𝑦)+𝑙𝑛𝐶1, 𝑧= 𝐶1sin2(𝑦), 𝑦′= 𝐶1𝑠𝑖𝑛2(𝑦). Решение 𝑦=𝐶 не удовлетворяет данным условиям ни при каком значении 𝐶 , так как для него 𝑦′=0. Подберем 𝐶1 так, чтобы решение второго уравнения 𝑦′=𝐶1𝑠𝑖𝑛2(𝑦) удовлетворяло условиям 𝑦=𝜋/2,𝑦′=1 (при 𝑥=2). Тогда 1=𝐶1𝑠𝑖𝑛2(𝜋/2), т.е. 𝐶1=1 , так что 𝑦′=𝑠𝑖𝑛2(𝑦). Отсюда 𝑑𝑦/𝑠𝑖𝑛2𝑦=𝑑𝑥,−𝑐𝑡𝑔(𝑦)=𝑥+𝐶2. Полагал здесь 𝑥=2, 𝑦=𝜋/2, получим 0=2+𝐶2, т.е. 𝐶2=−2. Следовательно, −𝑐𝑡𝑔(𝑦)=𝑥−2, и искомое частное решение уравнения имеет вид 𝑦=𝑎𝑟𝑐𝑐𝑡𝑔(2−𝑥).

**3. Линейные уравнения c постоянными коэффициентами**

***3.1 Метод неопределенныx коэффициентов.***

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

𝑦′′+𝑝𝑦′+𝑞𝑦=𝑓(𝑥) , (8)

Где p, q – постоянные. Если 𝑓(𝑥)=0 , то уравнение называется однородным (относительно искомой функции и ее производных).

Общее решение линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид 𝑦= 𝐶1𝑦1+ 𝐶2𝑦2, где 𝐶1, 𝐶2 – произвольные постоянные, а – фундаментальная система решений этого уравнения. Они определяются в зависимости от корней характеристического уравнения . Если корни вещественные различные , то . В частности, если , то общее решение можно записать в виде . Если корни вещественные равные , то . Если корни комплексные , то

Общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

, где – общее решение соответствующего однородного уравнения – частное решение уравнения (8).

Для определения можно использовать два метода: неопределенных коэффициентов и вариаций постоянных (метод Лагранжа). Первый применим лишь к уравнению с постоянными коэффициентами при некоторых видах свободного члена . Второй пригоден для уравнения с любым (в т.ч. переменными) коэффициентами и любым свободным членом, но требует знания общего решения соответствующего однородного уравнения (эта задача решена в общем виде только в случае постоянных коэффициентов уравнения).

Кроме того, для решения задачи Коши можно использовать операционный метод, который применим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами и любым свободным членом.

Рассмотрим метод неопределенных коэффициентов для двух видов свободного члена:

1. Согласно методу неопределенных коэффициентов частное решение уравнения нужно искать в виде

где  – многочлен n-й степени с буквенными (неопределенными) коэффициентами, которые определяются после подстановки  в уравнение из условия обращения его в тождество. Следовательно, , ,  и т.д.

*Пример 8*. Найдем общее решение уравнения . Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение . Характеристическое уравнение . Его корни , . Следовательно, . Так как  – простой корень характеристического уравнения и , то согласно правилу (9) полагаем . Подставим это выражение в уравнение. Из условия обращения его в тождество получим систему для определения коэффициентов *A* и *B*.

Так как ,

,

, то

.

Сократив равенство почленно на  и приведя подобные члены, получим , или.

Это равенство обращается в тождество, если совпадают коэффициенты при одинаковых степенях , т.е.





Следовательно, , , т.е. общее решение данного уравнения имеет вид .

2) Согласно методу неопределенных коэффициентов частное решение уравнения нужно искать в виде



где коэффициенты *A* и *B* определяются после подстановки  в уравнение из условия обращения его в тождество.

*Пример 9.* Проинтегрируем уравнение . Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение . Характеристическое уравнение . Его корни . Следовательно, . Так как ,  и   – не корни характеристического уравнения, то согласно правилу (10) полагаем . Подставим это выражение в уравнение, сократим его на , приведем подобные члены и приравняем коэффициенты при  и  в обеих частях уравнения (для обращения его в тождество). Получим систему уравнения для определения *A* и *B*. Так как

,

то ,





Следовательно, . Общее решение уравнения .

***3.2. Метод вариации постоянных***.

 Согласно методу вариации постоянных частное решение  линейного неоднородного уравнения  ищется в таком же виде, как и общее решение  соответствующего однородного уравнения, с той лишь разницей, что постоянные в нем  и  заменяются функциями (отсюда и название метода), подлежащими определению, т.е. . Эти функции можно найти из системы линейных алгебраических уравнений



которая имеет единственное решение  и . Проинтегрировав эти функции, найдем  и  (при этом в качестве постоянных интегрирования можно взять, например, нули, так как функция  является частным решением уравнения).

*Пример 10*. Найдем общее решение уравнения . Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение . Характеристическое уравнение  имеет мнимые корни . Следовательно, . Для нахождения  воспользуемся методом вариации постоянных (метод неопределенных коэффициентов для данного свободного члена неприменим). Полагаем . Система (II) имеет вид



так как , . Решив систему, найдем , . Следовательно, , , . Общее решение уравнения .

*Пример 11*. Проинтегрируем уравнение . Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение . Характеристическое уравнение  имеет равные корни , то . Согласно методу вариации постоянных (метод неопределенных коэффициентов неприменим) полагаем . Тогда система (II) имеет вид



Решив её, найдем , . Отсюда , , . Следовательно, общее решение уравнения , где .

Заметим, что уравнения №3,4 можно проинтегрировать методом вариации постоянных. Однако, как правило, метод неопределенных коэффициентов (если он применим) значительно проще.

***3.3. Метод наложения***.

 Частное решение  линейного неоднородного уравнения  может быть найдено в виде суммы  где  – частное решение уравнения , а  – частное решение уравнения . Этот результат называется «принципом наложения».

*Пример 12*. Найдем общее решение уравнения . Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение . Характеристическое уравнение  имеет комплексные корни . Следовательно, . Согласно принципу наложения , где  – частное решение уравнения , а  – частное решение уравнения . Используя для их нахождения метод неопределенных коэффициентов, в силу правил (9) и (10) положим  (так как  – не корень характеристического уравнения и ), а  (так как  – не корни характеристического уравнения). Подставив эти выражения в соответствующие уравнения, найдем коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Следовательно, , . Общее решение данного уравнения  или .

***3.4. Операционный метод****.*

 В основе операционного метода решения задачи Коши для линейного уравнения с постоянными коэффициентами лежит преобразование Лапласа.

Преобразованием Лапласа называется переход от функции  к функции  по формуле , где  – комплексная переменная. Функция  называется оригиналом, а функция  – её изображением. Это записывается так: .

Свойства преобразования Лапласа позволяют свести решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами к решению алгебраического уравнения относительно изображения искомого решения и определению оригинала найденного изображения. Преимущество операционного метода по сравнению с изученными ранее состоит в том, что он автоматически учитывает начальные условия (т.е. нет необходимости в предварительном нахождении общего решения).

Приведем основные свойства преобразования Лапласа.

1. Свойство линейности: , где  – постоянные и .
2. Изображение производной оригинала: , , где .
3. Теорема свертывания: , где , .

Из определения преобразования Лапласа и его свойств следует таблица изображений некоторых оригиналов.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

*Пример №13*. Решим задачу Коши , , т.е. найдем частное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Эту задачу можно решить методами, рассмотренными выше, т.е. найти, используя метод наложения, общее решение данного уравнения, а затем выделить из него искомое частное. Однако, как уже указывалось, 

 

Целесообразнее применение операционного метода.

Положим y(t):Y(p). Применим к обеим частям уравнения преобразования Лапласа, т.е. умножим его почленно на e-pt и проинтегрируем на [0,+∞). В силу свойств 1 и 2 преобразования, а также таблицы изображений получим . Учитывая начальные условия, найдем . Это алгебраическое уравнение первой степени относительно изображения Y(p) искомого решения задачи y(t) есть операционное изображение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях, т.е. операционное изображение данной задачи Коши.

Очевидно, . Чтобы найти оригинал по этому изображению, представим дробь в виде суммы элементарных дробей, т.е. .

Тогда:

,

;

;

;

,

т.е. .

Из таблицы изображений в силу свойства линейности найдем решение задачи

, или .

*Пример 14.*

Найдем решение задачи Коши для нормальной системы уравнений второго порядка

 x(0)=2,y(0)=10.

Положим . Применив к обоим уравнениям преобразования Лапласа и использовав начальные условия, получим

, или

Так как

,

то по формулам Крамера





С помощью таблицы изображений и свойства линейности преобразования Лапласа найдем решение задачи x=2cos(2t)-12sin(2t), y=10cos(2t)+14sin(2t).

*Пример 15.* Найдем решение задачи Коши Применив к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и учтя начальные условия, получим где 
Отсюда  По таблице изображений найдем y=cos(t)+2sin(t)+z(t), где  Так как то теореме свертывания 

Следовательно, решение задачи или 

 Заметим, что операционный метод можно применить и к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. При этом начальные условия нужно задавать в виде 

**Вариант задания**

**I.** Определить тип уравнения и найти его общее решение:

**II**. Решить задачу Коши:

1. .

Задание содержит задачи следующих типов:

1. Уравнения первого порядка:

Уравнения с разделяющимися переменными (11);

Линейные уравнения (1);

Уравнения Бернулли (8);

Однородные уравнения (4);

1. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

Простейшие уравнения (9);

Уравнения, содержащие только аргумент и две старшие производные (2);

Уравнения второго порядка, не содержащие аргумент (12);

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами:

Метод неопределенных коэффициентов (3,7);

Метод вариации постоянных (5,10);

Метод наложения (6);

Операционный метод (13,14,15);

**Литература**

**а) основная литература:**

1. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Высшая школа, 1967.

2. Краснов М.А.. Киселев А.И. и Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: УРСС Москва. 2002.

3. Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики: Высшая школа, 1978.

**б) дополнительная литература:**

1. Цветницкая, С.А. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Томск : ТГУ, 2015.

2. Хеннер, В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.К. Хеннер, Т.С. Белозерова, М.В. Хеннер. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017.