Министерство транспорта Российской Федерации (Минтранс России)
Федеральное агентство воздушного транспорта (Росавиация)
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания по изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы
Для студентов заочного факультета
Направление подготовки
38.03.01 «Экономика»
Профиль подготовки ЭПО

Санкт-Петербург
2018

Одобрено и рекомендовано к изданию
Учебно-методическим советом Университета

Ш 87(03)

Математический анализ: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Университет ГА, С.-Петербург, 2018.

Издаются в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математический анализ». Содержат основные положения, требования к уровню освоения дисциплины, задание на контрольную работу, вопросы к экзаменам и список литературы.

Предназначены для студентов заочного факультета направления подготовки 38.03.01 «Экономика», профиля подготовки «Экономика предприятия и организация воздушного движения».

Библ. 10 назв., рис.12.

Составитель Е.В.Скакун, ст. преп.

Рецензент Я.М.Далингер, канд.техн.наук, доцент

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Порядок выполнения контрольных работ.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала по учебнику. Следует также внимательно разобрать решение тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме.

Темы указаны в соответствии с программой курса "Математический анализ". При выполнении работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, полный шифр, номер контрольной работы и дата её отправки в институт. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул и теорем, которые используются при решении задач. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3-4 см.

2. После получения работы (как зачтённой, так и незачтённой) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачёта студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтённые контрольные работы.

4. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с двумя последними цифрами его учебного шифра. Например, если шифр 980327, то студент выполняет в контрольной работе вариант № 7 каждого задания.

5. Если в процессе изучения материала или при решении задач у студента возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то можно обратиться к преподавателю для получения устной или письменной консультации.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

§1. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Вычисление пределов

1. Вычисление пределов с использованием теорем о конечных пределах

Справедливы следующие теоремы:

1. $\lim_{x\to a} C = C$ ($C - постоянная$)

2. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$

3. Если каждая из функций $f(x)$ *и* $g(x)$ имеет при $x \to a$ конечный предел, то

$\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a}[f(x)] \pm \lim\limits_{x\to a}[g(x)]$;

$\lim\limits_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim\limits_{x\to a}[f(x)] * \lim\limits_{x\to a}[g(x)]$;

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a}[f(x)]}{\lim_{x\to a}[g(x)]}, если\ \lim_{x\to a}[g(x)] \neq 0.$

Для нахождения предела элементарной функции $f(x)$ при $x \to a$ в случае, если a - конечная точка, принадлежащая области определения $f(x)$, нужно вычислить значение этой функции при x=a. Это значение и будет искомым пределом, т.е. $\lim_{x\to a}[f(x)] = f(a)$.

ПРИМЕР 1. Найти пределы функций при $x \to a$:

а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, a = -1$;

б) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}, a = 2$;

в) $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{\cos(2x)}, a = \frac{\pi}{2}$.

РЕШЕНИЕ: Данные функции элементарные, поэтому можно применить сформулированное правило:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2 - 2x + 5) = 3(-1^2) - 2(-1) + 5 = 10$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} = \sqrt{2x^2 + 1} = \sqrt{2 * 2^2 + 1} = 3$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} = \sin(x) + \frac{1}{\cos(2x)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\cos(2\frac{\pi}{2})} = 1 + (-1) = 0.$

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim_{x\to a}[f(x)] = 0$; функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a (или при $x \to a$), если $\lim_{x\to a}[f(x)] = \infty$.

Справедливы теоремы:

1. Сумма конечного числа бесконечно малых в точке a функций — бесконечно малая функция.

2. Если $f(x)$ — функция, ограниченная в некоторой окрестности точки a, функция $g(x)$ – бесконечно малая в этой точке, то функция $f(x) \cdot g(x)$ — бесконечно малая.

3. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ стремится к отличному от нуля пределу, а функция $g(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то функция $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$.

4. Если функция $f(x)$ – бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки не равна нулю, то функция $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая в точке a; если $f(x)$ – бесконечно большая в точке а, то $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.

ПРИМЕР 2. Найти а) $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{\cos(x)}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{sin(x)}{x^2+3}$.

РЕШЕНИЕ:

а) При $x \to 1$ функция (x-1) – бесконечно малая, значит $\frac{1}{x-1}$ бесконечно большая, $\cos(x) \to \cos 1 \neq 0$, следовательно, $\frac{\cos(x)}{x-1}$ – бесконечно большая, т.е. $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{\cos(x)}{x-1} = \infty$

б) При $x \to \infty$ функция $(x^2 + 3)$ – бесконечно большая, поэтому $\frac{1}{x^2+3}$ – бесконечно малая. Функция $sin(x)$ – ограниченная, значит, произведение $sin(x)\frac{1}{x^2+3}$ – бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} = \frac{sin(x)}{x^2+3} = 0$.

3.Раскрытие неопределенностей

Если при формальной подстановке предельного значения аргумента получается выражение вида:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty}; 0 * \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

то для нахождения пределов функций необходимо проводить преобразования данных выражений.

ПРИМЕР 3. $\lim\limits_{x\to 1} = \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

РЕШЕНИЕ: Непосредственная подстановка значения $x = 1$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби, выделим общий множитель и сократим на него дробь.

Для разложения числителя воспользуемся формулой:

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, т.е. $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

В знаменателе дроби стоит квадратный трехчлен. Если квадратный трехчлен имеет корни x_1, x_2, то он раскладывается на множители следующим образом: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Данный квадратный трехчлен имеет корни $x_1 = 1, x_2 = 2$, поэтому $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 + x + 1)}{(x - 2)} = -3.$$

ПРИМЕР 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}$.

РЕШЕНИЕ: Непосредственно подставляя $x = 0$, получаем неопределенность $\frac{0}{0}$. Умножим и разделим данную дробь на выражение, сопряженное числителю, то есть на $(\sqrt{1 - 2x^2} + 1)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-2x^2}-1)(\sqrt{1-2x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1-2x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x^2-1}{x^2(\sqrt{1-2x^2}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1-2x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(\sqrt{1-2x^2}+1)}=-1.$$

Замечание: Если в примере иррациональность имеется в числителе и знаменателе дроби, то дробь следует умножить и разделить на выражение, сопряженное числителю и не выражение, сопряженное знаменателю.

ПРИМЕР 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}$.

РЕШЕНИЕ: В этом примере неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Вынесем за скобки в числителе x^3, а в знаменателе x^2 (наивысшую степень x для каждого многочлена):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3-{}^{2}/_{x^2}+{}^{5}/_{x^3})}{x^2(7+{}^{3}/_{x}-{}^{8}/_{x^2})}=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{3-{}^{2}/_{x^2}+{}^{5}/_{x^3}}{7+{}^{3}/_{x}-{}^{8}/_{x^2}}\right).$$

Величины ${}^{1}/_{x}$, ${}^{1}/_{x^2}$, ${}^{1}/_{x^3}$, обратные бесконечно большим, бесконечно малые, и, значит, выражение в скобках стремится к ${}^{3}/_{7}$. x – бесконечно большая величина, следовательно, произведение $x\cdot{}^{3}/_{7}$ также величина бесконечно большая, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x+5}{7x^2+3x-8}=\infty.$$

Аналогичный прием вычисления пределов можно использовать для раскрытия неопределенностей в случае иррациональных функций.

ПРИМЕР 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+8}{\sqrt{4x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(5+{}^{8}/_{x})}{\sqrt{x^2(4-{}^{3}/_{x^2})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(5+{}^{8}/_{x})}{|x|\sqrt{4-{}^{3}/_{x^2}}}$$

Так как $x\to+\infty$, то $x>0$ и, значит, $|x|=x$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(5+{}^{8}/_{x})}{|x|\sqrt{4-{}^{3}/_{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(5+{}^{8}/_{x})}{x\sqrt{4-{}^{3}/_{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+{}^{8}/_{x}}{\sqrt{4-{}^{3}/_{x^2}}}=\frac{5+0}{\sqrt{4-0}}=\frac{5}{2}.$$

ПРИМЕР 7. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$.

РЕШЕНИЕ: Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$.Умножим и разделим данное выражение на сопряженное:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}.$$

Получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскроем её стандартным способом:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+{}^{2}/_{x})}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+{}^{2}/_{x}}-x}$$

Так как $x\to-\infty$, то $x<0$ и, значит, $|x|=-x$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+{}^{2}/_{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+{}^{2}/_{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+{}^{2}/_{x}}+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+{}^{2}/_{x}}+1}=-1$$

4. Вычисление пределов с использованием эквивалентных бесконечно малых величин

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$, называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность бесконечно малых обозначается так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. При раскрытии неопределенностей можно пользоваться правилом: предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если эти бесконечно малые под знаком предела заменить им эквивалентными. Если при $x\to a$ $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то

$sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;	$\ln\big(1+\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$;	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln(a)$;	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{\alpha(x)}{n}$
$arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;	$1-cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha(x)^2}{2}$;	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

ПРИМЕР 8. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^{(3x^2)}-1\right)sin\,2x}{\ln(1-3x)(1-\cos 2x)}$.

РЕШЕНИЕ: Так как при $x\to0$, $3x^2\to0$, $2x\to0,(-3x)\to0$, то имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Заменим исходные бесконечно малые эквивалентными

$$e^{(3x^2)}\sim3x^2;\sin(2x)\sim2x;\ln(1-3x)\sim(-3x);1-\cos(2x)\sim\frac{4x^2}{2}=2x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{(3x^2)}-1\right)sin2x}{\ln(1-3\mathrm{x})\,(1-\cos 2\mathrm{x})}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2*2x}{(-3\mathrm{x})2x^2}=-1.$$

5.Непрерывность функции в точке и на промежутке

Точка разрыва функции

Если функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности конечной точки a, то точка a называется точкой разрыва функции в двух случаях:

1) в точке $x=a$ функция $f(x)$ не определена;

2) в точке $x=a$ функция $f(x)$ определена, но не выполняется хотя бы одно из равенств:

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a), \qquad (1)$$

где $f(a-0)$ и $f(a+0)$ – левосторонний и правосторонний пределы функции f в точке a.

Если при этом $f(a-0)$ и $f(a+0)$ конечны, то точка $x=a$ называется точкой разрыва первою рода (или точкой конечного разрыва). Причем, если $f(a-0)=f(a+0)$, то разрыв называется устранимым.

Если хотя бы один из пределов в равенстве (1) не существует или бесконечный, то точка a называется точкой разрыва второго рода (точкой бесконечного разрыва, если хотя бы один из соответствующих пределов – бесконечный).

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.

ПРИМЕР 9. Найти точки разрыва функции $y=f(x)$, определить тип разрыва. Для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции. Построить график.

$$\begin{cases} x^3, x\le 0, \\ 3^x, 0<x\le 1 \\ -2x+5, x>1 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ: Внутри каждого из промежутков $(-\infty; 0)$, (0; 1) и (1; $+\infty$) функция $f(x)$ совпадает с соответствующей элементарной функцией. Следовательно, внутри каждого из этих промежутков функция $f(x)$ будет непрерывной, и разрывы могут быть только на концах этих промежутков, то есть в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Найдем односторонние пределы в этих точках:

1. Для точки $x = 0$ имеем:

$$f(0-o) = \lim_{x\to 0-o} f(x) = \lim_{x\to 0-o} x^3 = 0;$$

$$f(0+o) = \lim_{x\to 0+o} f(x) = \lim_{x\to 0+o} 3^x = 3^0 = 1.$$

Оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, значит, точка $x = 0$ есть точка разрыва I рода. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет скачок $\delta = f(0+o) - f(0-o) = 1 - 0 = 1$.

2. Рассмотрим точку $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1-o} f(x) = \lim_{x\to 1-o} 3^x = 3^1 = 3;$$

$$\lim_{x\to 1+o} f(x) = \lim_{x\to 1+o} (-2x+5) = -2\cdot 1 + 5 = 3;$$

$$f(1) = 3^1 = 3.$$

Односторонние пределы равны и совпадают со значением функции в рассматриваемой точке, значит, в этой точке функция $f(x)$ непрерывна. График функции (см. рис.1)

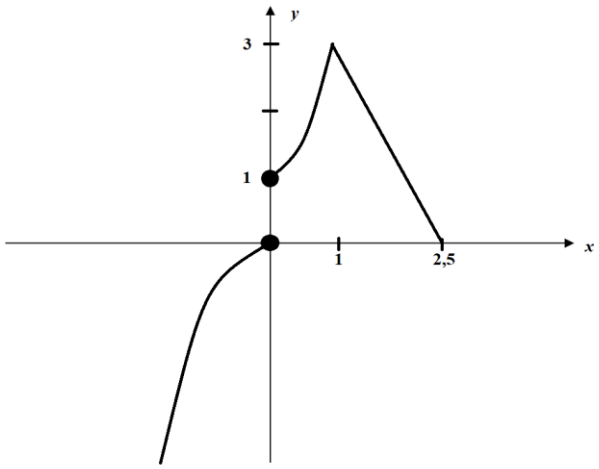

Рис. 1

ПРИМЕР 10. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{8|x+1|}{x^2-2x-3}$, установить тип разрыва, для точек разрыва первого рода вычислить скачок функции, построить график в окрестности точек разрыва.

РЕШЕНИЕ: Преобразуем дробь:

$$f(x) = \frac{8|x+1|}{x^2-2x-3} = \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)}$$

Функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 3$ и, следовательно имеет в этих точках разрывы. Найдем соответствующие односторонние пределы:

Для точки $x = -1$ при $x \to -1 - o$ $x + 1 < 0$ и, значит, $|x+1| = -(x+1)$

Следовательно,

$$f(-1-o) = \lim_{x\to -1-o} \frac{8*(-(x+1))}{(x+1)(x-3)} = -\lim_{x\to -1-o} \frac{8}{(x-3)} = 2.$$

Аналогично вычислим

$$f(-1+o) = \lim_{x\to -1+o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1+o} \frac{8*(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to -1+o} \frac{8}{(x-3)} = -2.$$

Так как оба предела конечны, то точка $x = -1$ – точка, разрыва первого рода. Поскольку пределы не равны, то это – конечный разрыв I рода.

$\delta = f(-1+o) - f(-1-o) = -2 - 2 = -4$ – скачок функции. В окрестности точки $x = 3$ $x + 1 > 0$, поэтому $|x+1| = x+1$ и, значит:

$$f(3-o) = \lim_{x\to 3-o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3-o} \frac{8*(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3-o} \frac{8}{(x-3)} = -\infty$$

$$f(3+o) = \lim_{x\to 3+o} \frac{8|x+1|}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3+o} \frac{8*(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x\to 3+o} \frac{8}{(x-3)} = +\infty$$

Таким образом, точка $x = 3$ – точка бесконечного разрыва второго рода. График функции представлен на, рис.2,3.

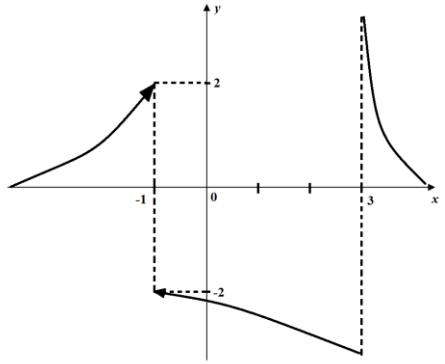

Рис.2

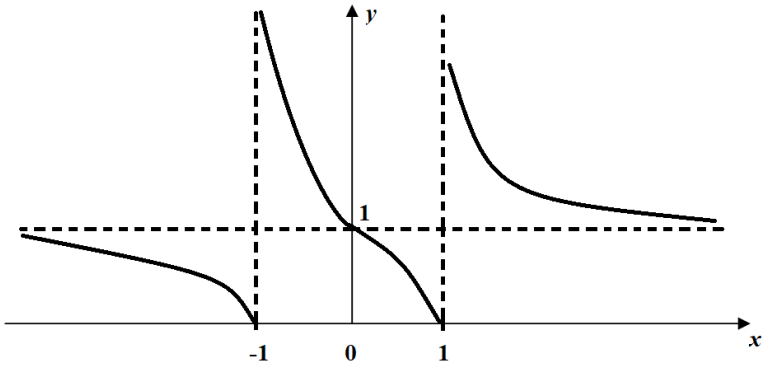

Рис.3

ПРИМЕР 11. Найти точки разрыва функции $f(x) = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$, определить тип разрыва, начертить эскиз графика функции в окрестности точек разрыва.

РЕШЕНИЕ: Данная элементарная функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 1$ и, следовательно, имеет в этих точках разрывы.

Найдем односторонние пределы, учитывая, что $a^t \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $a^t \to 0$ при $t \to -\infty$, если $a > 1$.

1. Рассмотрим точку $x = -1$.

Так как при $x \to -1 - o$ $x^2 - 1 > 0, \frac{x}{x^2-1} \to -\infty$, то $f(-1-o) = \lim\limits_{x \to -1-o} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = 0$.

При $x \to -1 + o$ $x^2 - 1 < 0$, значит, $\frac{x}{x^2-1} \to +\infty$.

Следовательно, $f(-1+o) = \lim\limits_{x \to -1+o} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = +\infty$.

Таким образом, точка $x = -1$ – точка бесконечного разрыва второго рода.

2. Рассмотрим точку $x = 1$. Аналогично предыдущему получаем $f(1-o) = 0$; $f(1+o) = +\infty$, то есть в точке $x = 1$ функция имеет бесконечный разрыв второго рода.

3. Рассмотрим поведение функции при $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{\frac{x}{x^2-1}} = 2^0 = 1.$ Следовательно, $y = 1$ – асимптота функции.

6. Производная и дифференциал

Вычисление производных

Основные правила дифференцирования:

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой точке

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(cu)' = cu'\ (c = const)$
3. $(uv)' = uv' + u'v$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - u'v}{v^2}$

Таблица производных:

1. $(c)' = 0$; 4. $u(\cos(x))' = -\sin(x)$; 7. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $\mathrm{arcctg}(x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; 13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;	2. $(x^m)' = mx(x^{m-1})$; 5. $tg(x)' = \frac{1}{cos^2(x)}$; 8. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11. $(e^x)' = e^x$; 14. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$;	3. $(\sin(x))' = (\cos(x))'$; 6. $(ctg(x))' = -\frac{1}{sin^2(x)}$; 9. $\mathrm{arctg}(x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 12. $(a^x)' = a^x \ln(a)$; $(a > 0, a \neq 1)$ 15. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(a > 0, a \neq 1)$

ПРИМЕР 12. Найти производную функции $y = 2\sqrt[3]{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{x^2}{2} + 3.$

РЕШЕНИЕ: Используем первое и второе правила дифференцирования

$$y' = \left(2\sqrt[3]{x}\right)' - \left(\frac{5}{x^2}\right)' + \left(\frac{x^2}{2}\right)' + (3)' = 2(x^{\frac{1}{3}})' - 5(x^{-2})' + \frac{1}{2}(x^2)' + (3)'$$

Далее используем формулу для нахождения производной степенной функции (табличная формула № 2):

$$y' = 2(x^{\frac{1}{3}})' - 5(x^{-2})' + \frac{1}{2}(x^2)' + (3)' =$$

$$= 2\frac{1}{3}(x)^{\frac{1}{3}-1} - 5(-2)(x)^{-2-1} + \frac{1}{2}2(x)^{2-1} + 0 =$$

$$= \frac{2}{3}(x)^{-\frac{2}{3}} + 10x^{-3} + x = \frac{2}{3\sqrt{x^2}} + \frac{10}{x^3} + x$$

ПРИМЕР 13. Найти производную функции $y = (\cos x + 5)e^x$.

РЕШЕНИЕ: Используем правило дифференцирования произведения и табличные формулы № 4 и № 11:

$$y' = (\cos x + 5)'(e^x) + (\cos x + 5)(e^x)' = (-sin + 0)e^x + (\cos x + 5)e^x =$$
$$= e^x(\cos x - \sin x + 5)$$

ПРИМЕР 14. Найти производную функции $y = \frac{arctg\ (x)}{\ln x}$.

РЕШЕНИЕ: Используем правило дифференцирования частного и табличные формулы №9 и № 13:

$$y' = \frac{arctg\ (x)'\ln x - arctg\ (x)(\ln x)'}{ln^2 x} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\ln x - arctg\ (x)\frac{1}{x}}{ln^2 x} =$$

$$\frac{x\ln x - arctg\ (x)(1+x^2)}{x(1+x^2)ln^2 x}.$$

7. Дифференцирование сложной функции

Производная сложной функциии $y = f(u(x))$ вычисляется по формуле

$$y_x' = f_u'(u)u_x'.$$

То есть, чтобы найти производную сложной функции, нужно сначала продифференцировать ”внешнюю” функцию по промежуточному аргументу и так, как если бы аргумент и был независимой переменной, после чего умножить полученный результат на производную от функции u по переменной x.

Это правило распространяется на сложную функцию, состоящую из любого конечного числа дифференцируемых функций.

ПРИМЕР 15. Найти производную функции $y = \ln(1 + 2\cos x)$.

РЕШЕНИЕ: Данная функция – сложная, промежуточный аргумент $u = (1 + 2\cos x)$. Согласно приведенному правилу имеем

$$y' = (\ln u)_u{}' u'_x = \frac{1}{u}(1 + 2\cos x)' = \frac{1}{1 + 2\cos x}(-2\sin x).$$

ПРИМЕР 16. Найти производную функции $y = \sqrt{8 + \sin^2 x}$.

РЕШЕНИЕ: Данная сложная функция составлена из трех функций

$y = f\left(u\big(v(x)\big)\right)$, *где* $f(u г) = \sqrt{u}, u(v) = 8 + \sin^2 x, v = \sin x$. Применяем правило дифференцирования сложной функции (начиная дифференцировать с “внешней” функции *f*):

$$f'_u u'_x = f'_u u'_v v'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}}(8 + \sin^2 x)'_x = \frac{1}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}} 2vv'_x$$

$$= \frac{2\sin x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}}(\sin x)' = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{8 + \sin^2 x}}.$$

8. Геометрический смысл производной и дифференциала функции

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задана кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$ и на ней точка $M_0(x_0; y_0)$. Производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ геометрически представляет собой *угловой коэффициент касательной* к графику функции в точке с абсциссой x_0, т.е. $f'(x_0) = k = tg(\varphi)$ (см. рис.4). Тогда уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

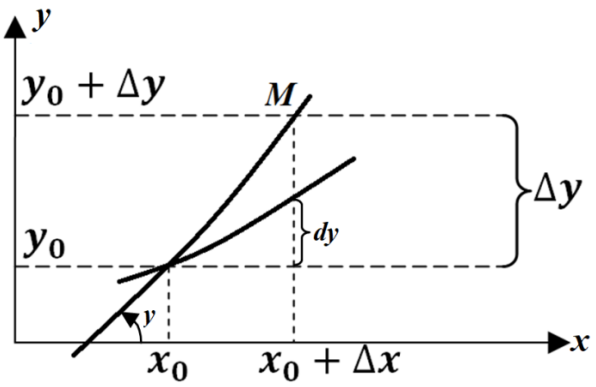

Рис.4

Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 находится по формуле $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, т.е. равен произведению производной функции в заданной точке на дифференциал (приращение) независимой переменной. Геометрически дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой *приращение ординаты касательной* к графику функции в точке x_0 и при $\Delta x \to 0, \Delta y$ и dy являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому справедливо приближенное равенство $\Delta y \sim dy$, позволяющее приближенно заменять приращение функции дифференциалом.

ПРИМЕР 17. Найти координаты точки пересечения с осью *Oy* касательной к кривой $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$, проведенной к ней в точке $M_0(-1; 4)$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем сначала производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4} = \frac{2(x-1)x - 2(x-1)^2}{x^3} = \frac{2x-2}{x^3} = \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

Вычислим $f'(-1) = \frac{2(-1-1)}{(-1)^3} = 4$, тогда уравнение касательной к заданной кривой в точке $M_0(-1; 4)$ запишется в виде:

$$y - 4 = y(x + 1) \text{ или } y = 4x + 8.$$

Теперь находим координаты точки пересечения полученной прямой с осью *Oy*.

Для всех точек, лежащих на оси *Oy*, *x* = 0. Подставим в уравнение касательной *x* = 0, получим *y* = 8. Значит, касательная $y = 4x + 8$ пересекает ось *Oy* в точке(0, 8).

§2. Применение правила Лопиталя к нахождению предела функции

При отыскании предела $\lim_{x\to a}\varphi(x)$ подстановка предельного значения $x = a$ в ряде случаев приводит к неопределенным выражениям типа: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Тогда вычисление заданного предела называют раскрытием неопределенности соответствующего типа. Обычно при этом используют *правило Лопиталя*.

9. Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Непосредственно применять правило Лопитапя можно только для раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Согласно этому правилу, предел отношения двух бесконечно малых (или двух бесконечно больших) существует и равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если выполнены условия:

1) функции $f(x)$ *и* $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x = a$ *и* $g(x) \neq 0$ и в этой окрестности (кроме, может быть самой точки *a*);

2) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (*или* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$);

3) существует $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, (конечный или бесконечный), при этом a может быть как числом, так и одним из символов: $\infty, +\infty, -\infty$.

ПРИМЕР 17. Найти $\lim_{x\to \pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку $\lim\limits_{x\to\pi/3}=(1-2\cos x)=1-2\cos x=1-$ $2\cos\pi 3=1-2\cdot 12=0$ $\lim x\to\pi 3=\sin\pi-3x=\sin\pi-3\pi 3=\sin 0=0,$ то имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Функции ($1-2\cos x$) и $\sin(\pi-3x)$ дифференцируемы на всей числовой оси. Найдем предел отношения их производных:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'}=$$
$$=\lim_{x\to\pi/3}\frac{0-2(-\sin x)}{\cos(\pi-3x)(\pi-3x)'}=$$
$$=\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\sin x}{-3\cos(\pi-3x)}=$$
$$=\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\sin x}{-3\cos(\pi-3x)}=\frac{2\sin\pi/3}{-3\cos(\pi-3\,\pi/3)}=\frac{2\sqrt{3}/2}{-3\cdot 1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Так как этот предел существует, то согласно правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{(1-2\cos x)'}{(\sin(\pi-3x))'}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Замечание. Если предел отношения производных $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, вновь представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то правило Лопиталя применяется еще раз.

10. Раскрытие неопределенностей типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределенность типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ следует вначале путем тождественных преобразований привести к неопределенностям типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которых можно непосредственно применить правило Лопиталя.

ПРИМЕР 18. Найти $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\cos x\ln(\pi-2x)$.

РЕШЕНИЕ: При $x\to\pi/2-0$ аргумент логарифмической функции $(\pi-2x)\to 0+o$. Так как $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\cos x$ и $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\ln(\pi-2x)=-\infty$, то

возникает неопределенность типа $0\cdot\infty$. Обычно в таких случаях один из сомножителей записывают в знаменатель данного выражения:

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\cos x\ln(\pi-2x)}{1}=\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{1/\cos x}$$

Получена неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ к которой применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{\ln(\pi-2x)}{(\cos x)^{-1}}=\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{(\ln(\pi-2x))'}{((\cos x)^{-1})'}=\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{-2\dfrac{1}{\pi-2x}}{-(\cos x)^{-2}(-\sin x)}$$

$$=-2\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{(\cos x)^2}{\pi-2x}\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{1}{\sin x}=-2\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{(\cos x)^2}{\pi-2x}$$

(поскольку $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\sin x=1$). Здесь имеет место неопределенность типа $\frac{0}{0}$, для раскрытия которой снова применяем правило Лопиталя:

$$-2\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{(\cos x)^2}{\pi-2x}=-2\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{((\cos x)^2)'}{(\pi-2x)'}=-2\lim_{x\to\pi/2-0}\frac{2\cos x\,(-\sin x)}{-2}=\frac{2\cdot0\cdot(-1)}{-2}=0.$$

ПРИМЕР 19. Найти. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

РЕШЕНИЕ: Выражение в скобках, представляющее собой определенность типа $\infty-\infty$, приводим к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

Полученную неопределенность типа $\frac{0}{0}$ раскроем по правилу Лопиталя (в ходе вычислений это правило применено дважды):

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-0-1}{(e^x-1)+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)'}{((e^x-1)+xe^x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

11. Раскрытие неопределенностей типа $0^0, \infty^0, 1^\infty$

При раскрытии указанных неопределенностей используются:

а) основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (в частности, $e^{\ln b} = b$);

б) непрерывность показательной функции, в силу чего: $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim f(x)}$.

ПРИМЕР 20. Найти $\lim\limits_{x\to 0+o}(2 - e^x)^{ctg\ 3x}$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+o}(2 - e^x) = 2 - 1 = 1$,

$\lim_{x\to 0+o} ctg\ 3x = +\infty$ имеем неопределенность типа 1^∞. Найдем вначале предел логарифма заданной функции: $\lim_{x\to 0+o} \ln((2 - e^x)^{ctg\ 3x}) = \lim_{x\to 0+o} ctg\ 3x \ln(2 - e^x)$. Здесь возникла неопределенность типа $0\cdot\infty$. Если учесть, что $ctg\ 3x = \frac{1}{tg\ 3x}$, то перейдем к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+o} ctg\ 3x \ln(2 - e^x)$$

$$= \lim_{x\to 0+o} \frac{\ln(2 - e^x)}{tg3x} = \lim_{x\to 0+o} \frac{(\ln(2 - e^x))'}{(tg3x)'} = \lim_{x\to 0+o} \frac{\frac{1}{2 - e^x}(-e^x)}{\frac{1}{cos^2\ 3x}3}$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0+o} \frac{e^x cos^2\ 3x}{2 - e^x} = -\frac{1 * 1 * 1^2}{3 * (2 - 1)} = -\frac{1}{3}.$$

Теперь используем основное логарифмическое тождество и свойство непрерывности показательной функции:

$$\lim\limits_{x\to 0+o}(2 - e^x)^{ctg\ 3x} = \lim\limits_{x\to 0+o} e^{ln\ (2-e^x)^{ctg\ 3x}} = e^{\lim ln\ (2-e^x)^{ctg\ 3x}} = e^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Таким образом, для вычисления $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{f(x)}$ в случае неопределенностей $0^0, \infty^0, 1^\infty$ применяем правило $\lim\limits_{x\to a} u^v = e^q$, где $q = \lim_{x\to a} vln\ u$.

12. Применение производной к исследованию функции. Построение графиков функций

Промежутки монотонности и точки экстремума функции

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$, а также ее точки экстремума, надо вначале найти первую производную $y'(x)$ заданной функции. Затем следует определить промежутки, на которых эта производная сохраняет свой знак: там, где $y'(x) > 0$, функция $y(x)$ возрастает; если же $y'(x) < 0$, то на этом промежутке функция $y(x)$ убывает.

Чтобы найти точки экстремума (максимума или минимума) функции $y(x)$, прежде всего определяют критические точки функции $y(x)$, то есть точки, входящие в множество определения функции, в которых выполняется необходимое условие экстремума: либо $y'(x) = 0$, либо $y'(x) = \infty$, либо $y'(x)$ не существует. Затем каждую из найденных критических точек проверяют на наличие экстремума с помощью одного из достаточных признаков существования экстремума (по первой или второй производной).

ПРИМЕР 21. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

РЕШЕНИЕ: Прежде всего отметим, что данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$. Продифференцируем эту функцию

$$y' = \frac{4x^3\left(x^3 - 1\right) - x^4 3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^2} = \frac{x^3\left(x^3 - 4\right)}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$$

Очевидно, что точка $x_0 = 1$ не является критической, поскольку не принадлежит множеству определения функции. Имеем две критические точки, в которых $y' = 0$: это $x_1 = 0$ и $x_2 = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}58$. Чтобы найти промежутки

возрастания функции $y(x)$, надо решить неравенство $y' > 0$, или $\frac{x^3\left(x^3-4\right)}{\left(x^3-1\right)^2} > 0$.

Оно выполняется при $x \in \left]-\infty; 0\right[\cup \left]\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$ – это промежутки возрастания функции. Соответственно, $y' < 0$ при $x \in \left]0; 1\right[\cup \left]1; \sqrt[3]{4}\right[$ – промежутки убывания данной функции.

В критических точках $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$ проверим выполнение достаточного условия существования экстремума с использованием первой производной. При переходе через точку $x = 0$ первая производная y' меняет знак с (+) на (-), значит, $x = 0$ – точка максимума. Аналогично, точка $x_2 = \sqrt[3]{4}$ – точка минимума, потому что при переходе через нее первая производная y' меняет знак с (-) на (+).

Найдем экстремальные значения функции:

$$\max y(x) = y(0) = 0;\ \min y(x) = y\left(\sqrt[3]{4}\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 2{,}1.$$

13. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба определяются с помощью второй производной y''. На промежутках выпуклости $y'' < 0$, на промежутках вогнутости $y'' > 0$. Чтобы найти точки перегиба, исследуют точки, в которых либо $y'' = 0$, либо $y'' = \infty$, либо y'' не существует (причём в последних двух случаях y' в соответствующих точках определена). Точками перегиба являются те из найденных точек, при переходе через которые y'' изменяет свой знак.

ПРИМЕР 22. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба функций $y = \frac{x^4}{x^3-1}$.

РЕШЕНИЕ: Зная первую производную $y' = \dfrac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3 - 1\right)^2}$, найдем вторую

$$y'' = \left(\frac{x^6 - 4x^3}{\left(x^3 - 1\right)^2}\right)' = \frac{\left(6x^5 - 12x^2\right)\left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 - 4x^3\right)2\left(x^3 - 1\right)3x^2}{\left(x^3 - 1\right)^4} = \frac{6x^2\left(x^3 + 2\right)}{\left(x^3 - 1\right)^3}.$$

Поскольку первая производная в точке $x_0 = 1$ не определена, то исследуем только точки, в которых y'' = 0. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как при прохождении через нее вторая производная сохраняет свой знак (-). Точка $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ – точка перегиба, поскольку при переходе через нее y'' меняет свой знак с (+) на (-). Промежутки вогнутости графика данной функции: $\left]-\infty; -\sqrt[3]{2}\right[$ и $\left]1; +\infty\right[$, на промежутке $\left]-\sqrt[3]{2}; 1\right[$ график функции выпуклый. Значение функции в точке перегиба $y\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2} \approx -0{,}83$.

14. Асимптоты графика функции

а) Прямая $x = a$ является *вертикальных асимптотой* графика функции $y(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов: $\lim\limits_{x \to a+o} y(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-o} y(x)$ обращается в бесконечность. Поэтом для отыскания вертикальных асимптотой графика функции надо найти точки бесконечного разрыва данной функции, которые относятся к точкам разрыва 2-го рода.

ПРИМЕР 23.Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

РЕШЕНИЕ: Как отмечалось, данная функция не определена в точке $x_0 = 1$. При этом

$$\lim_{x \to 1-o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty; \ \lim_{x \to 1+o} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Поэтому прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика заданной функции.

б) График функции $y(x)$ имеет *наклонную асимптоту* $y = kx + b$ при $x \to +\infty \, (x \to -\infty)$, если существуют конечные пределы: $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \dfrac{y(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} [y(x) - kx]$. Если хотя бы один из этих пределов не существует или бесконечен, то график функции не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty \, (x \to -\infty)$. (Если асимптота задана уравнением $y = b$. то ее называют горизонтальной).

ПРИМЕР 24. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

РЕШЕНИЕ: Найдем значения k и b для данной функции при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 1/x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [y(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - 1/x^2} = 0$$

Аналогично находим, что при $x \to -\infty$ по-прежнему $k = 1$; $b = 0$. Таким образом, график функции $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ имеет одну и ту же наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$; это прямая $y = x$.

15. Общий план исследования функции

Чтобы составить достаточно полное представление о характере поведения функции и построить ее график, удобно проводить ее исследование по следующему плану:

1. Установить множество определения функции; при наличии точек разрыва найти в них односторонние пределы данной функции;
2. а) Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

б) Отметить особенности графика заданной функции, не связанные с производными, например, симметрию, периодичность.

3. Установить промежутки возрастания и убывания функции, найти ее экстремумы.
4. Установить промежутки выпуклости и вогнутости график функции, найти точки перегиба.
5. Найти асимптоты графика функции.

ПРИМЕР 25. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

РЕШЕНИЕ: Как отмечалось в примере 21, множество определения данной функции - вся числовая ось *Ox*, исключая точку $x = 1$: $X = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. График функции пересекается с осями координат в единственной точке *O*(0,0). Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку $y(-x) = \dfrac{(-x)^4}{(-x)^3 - 1} = \dfrac{x^4}{-x^3 - 1} \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, поэтому график функции не обладает свойствам симметрии. Дальнейшее исследование этой функции фактически уже проведено в примерах 21-24. По данным, полученным в этих примерах, сделан схематический чертеж графика заданной функции, который представлен на рис.5.

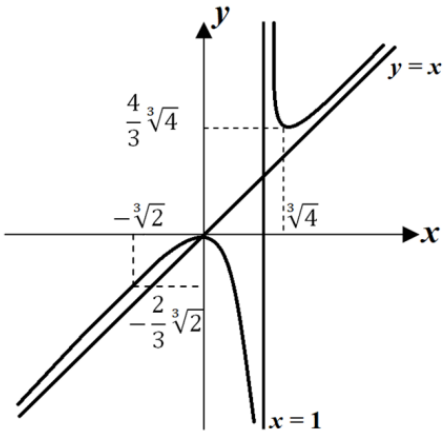

Рис. 5

ПРИМЕР 26. Исследовать функцию $y = xe^{1/x}$ и сделать схематический чертеж ее графика.

РЕШЕНИЕ: 1. Множество определения данной функции - вся числовая ось *Ox*, кроме точки $x = 0$: $X = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Найдем односторонние пределы функции при $x \to 0$. Предел слева $\lim\limits_{x \to 0-o} xe^{1/x} = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0-o} x = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0-o} e^{1/x} = \lim\limits_{y \to -\infty} e^{y} = 0$. При вычислении предела справа возникает неопределенность вила $0 \cdot \infty$; приводим ее к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, к которой применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0+o} xe^{1/x} = \lim_{x \to 0+o} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \to 0+o} \frac{\left(e^{1/x}\right)}{\left(1/x\right)} = \lim_{x \to 0+o} \frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0+o} e^{1/x} = +\infty .$$

2. а) Точки пересечения графика функции с осью *Ox* определяются из условия $y = 0$. В данном случае уравнение $xe^{1/x} = 0$ не имеет решений, так как $x = 0$ не входит в множество определения функции. Точки пересечения графика функции с осью *Oy* можно найти, положив $x = 0$. Для заданной функции это значение не входит в множество ее определения. Следовательно, график исследуемой функции не имеет точек пересечения с осями координат.

б) Поскольку $y(-x) = -xe^{-x} \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Находим $y' = \left(xe^{1/x}\right)' = e^{1/x} + xe^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}(x-1)$. Производная y' существует и конечна на всем множестве определения заданной функции $X = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Поскольку точка разрыва первой производной $x = 0$ не принадлежит множеству определения функции, то все критические точки функции $y(x)$ находим из условия: $y' = 0$, или $\frac{e^{1/x}}{x}(x-1) = 0$. Отсюда получаем $x = 1$.

Функция $y(x)$ возрастает, если $y' > 0$, то есть при $-\infty < x < 0$ и $1 < x < +\infty$.

Функция y(x) убывает, если $y' < 0$, в данном случае при $0 < x < 1$.

Таким образом, при переходе через точку $x = 1$ первая производная меняет знак с (-) на (+), то есть $x = 1$ - точка минимума; $y(1) = \min y(x) = e$.

4. Находим $y'' = \left[\frac{e^{1/x}}{x}(x-1)\right]' = e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\frac{1}{x^2} = \frac{e^{1/x}}{x^3}$. Вторая производная существует и конечна во всех точках множества определения данной функции. Тогда все точки перегиба находим из условия: $y'' = 0$. то есть $\frac{e^{1/x}}{x^3} = 0$. Поскольку это уравнение не имеет решения, то точек перегиба нет. График функции - выпуклый, если $y'' < 0$; в данном случае при $x < 0$. График функции вогнутый при $x > 0$,. где $y'' > 0$.

5. Как было установлено в пункте 1, в точке $x = 0$ функция $y = xe^{1/x}$ имеет бесконечный разрыв, поэтому прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой ее графика. Для определения наклонных асимптот найдем:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) - kx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{1/x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x} - 1}{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(e^{1/x} - 1\right)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

Значит, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Схематический чертеж графика функции (см. рис. 6).

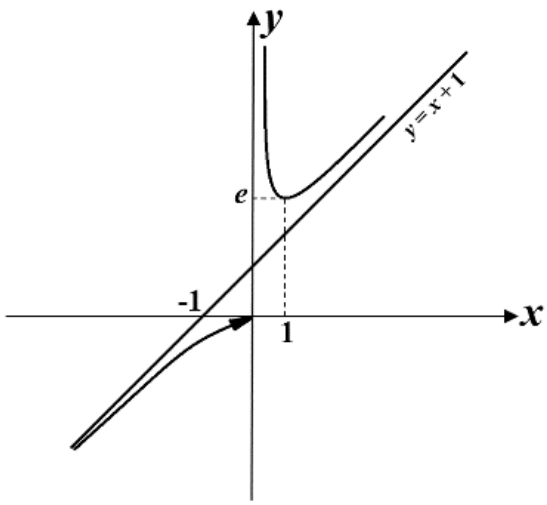

Рис.6

ПРИМЕР 27. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ и сделать схематический чертеж графика.

РЕШЕНИЕ: 1). Данная функция определена на всей числовой оси *Ox*: $X=\left(-\infty;+\infty\right)$.

2). Точки пересечения графика функции с осью *Ox* определяются из условия $y = 0$, откуда $x=\pm 1$, а с осью *Oy* - из условия $x = 0$, при этом $y(0) = 1$. Данная функция - четная, поскольку $y(-x)=\sqrt[3]{\left((-x)^2-1\right)^2}=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}=y(x)$, значит, ее график симметричен относительно оси *Oy*.

3). $y'=\left(\left(x^2-1\right)^{2/3}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}2x=\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$. Первая производная обращается в бесконечность в точках $x = 1$, $x = -1$, в то время как сама функция $y=\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ в этих точках определена. Значит эти точки критические для данной функции. Еще одна критическая точка определяется из условия $y' = 0$; это $x = 0$. Функция убывает, если $y' < 0$. то есть при $-\infty < x < -1$ и $0 < x < 1$. Функция возрастает при $y' > 0$, то есть при $-1 < x < 0$ и при $x > 1$. Таким образом, $x = 0$ – точка максимума, $x = -1$ и $x = 1$ – точки минимума данной функции; $y(0) = \max y(x)=1$; $y(-1)=y(1)=\min y(x)=0$. В точках $x = -1$ и $x = 1$ данная функция

имеет так называемый “острый” экстремум: касательная к графику функции в каждой из этих точек параллельна оси Oy.

4). $y'' = \left(\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} \right)' = \dfrac{4}{9} \dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$. Вторая производная обращается в бесконечность при $x = \pm 1$, но эти точки не принадлежат множеству определения $y'(x)$ и, следовательно, не являются критическими точками для первой производной. Значит, критические точки для нее определяем из условия $y'' = 0$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$, $y'' > 0$ при $-\infty < x < \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} < x < \infty$, то график $y(x)$ в этих интервалах вогнутый, а в интервалах $-\sqrt{3} < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < \sqrt{3}$ – график выпуклый, так как там $y'' < 0$.

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = y\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt[3]{4}\,.$$

5). Поскольку функция определена на всей числовой оси Ox, то вертикальных асимптот у ее графика нет. Проверим наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}} = \pm\infty\,.$$

Таким образом, наклонные асимптоты также отсутствуют. На рис.7 схематически изображен график функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

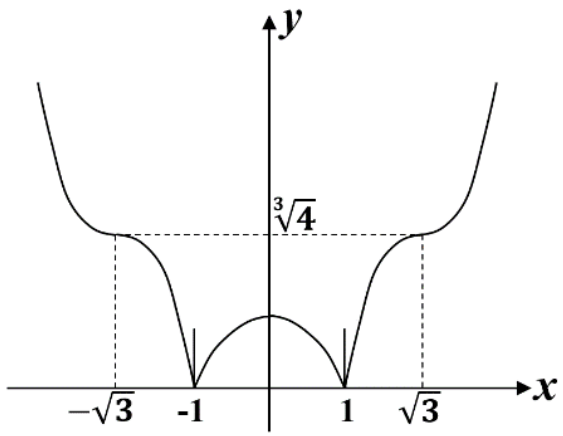

Рис. 7

Таблица основных интегралов

1. $\int Odx = C$

2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C; m \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{|a|} + C \\ -\arccos \frac{x}{|a|} + C \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Неопределенный интеграл

Интегрирование – нахождение функции по ее дифференциалу – это математическая операция, обратная дифференцированию функции.

В то время, когда дифференцирование функции проводится на основании общего правила, вытекающего из определения производной, для интегрирования функции нельзя указать такие общие правила. Техника интегрирования основана на применении основных свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$; $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2. $\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)]dx = C_1 \int f_1(x)dx + C_2 \int f_2(x)dx$;

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f[\varphi(x)]d[\varphi(x)] = F[\varphi(x)] + C$ (инвариантность формул интегрирования);

4. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Основная трудность при интегрировании состоит в приведении подынтегрального выражения к виду, позволяющему использовать таблицу интегралов. Для некоторых видов подынтегральных функций можно указать ряд приемов, позволяющих это сделать.

16. Метод замены переменной интегрирования (метод подстановки)

Суть этого метода состоит в преобразовании данного подынтегрального выражения к подынтегральному выражению уже известной формулы интегрирования с помощью замены переменной по формуле $x = \varphi(t)$ или $t = \psi(x)$ (причем функции $\varphi(t)$ или $\psi(x)$ должны иметь обратную функцию и быть непрерывно дифференцируемыми)

ПРИМЕР 28. Найти $I = \int \frac{e^x + 3e^{2x} - \sqrt{1 - e^{2x}}\cos 5x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$.

РЕШЕНИЕ: Разделив почленно числитель подынтегральной дроби на выражение, стоящее в знаменателе, и, применив свойство 2, получим сумму трех интегралов:

$$I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} + 3\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} - \int \cos 5x dx.$$

В первом из них введем новую переменную $t = e^x$, тогда $dt = e^x dx$ и $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin e^x + C$ (использована формула 9 из

таблицы интегралов). Вычисляя второй интеграл, введем переменную $z = 1 - e^{2x}$, при этом $dz = -2e^{2x}dx$, тогда

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz = -\frac{1}{2}\frac{z^{1/2}}{1/2} + C = -\sqrt{z} + C = -\sqrt{1-e^{2x}} + C$$

(применена формула 2 из таблицы интегралов, причем m = -1/2). При нахождении последнего интеграла можно не вводить новую переменную t, а использовать прием, называемый подведением под знак дифференциала: умножим и разделим подынтегральную функцию на 5 и учтем, что $5dx = d(5x)$.

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{1}{5} 5dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x) d(5x) = \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

На последнем шаге здесь использовано свойство инвариантности и формула 5 из таблицы интегралов. Окончательно

$$I = \arcsin e^x - 3\sqrt{1-e^{2x}} - \frac{1}{5}\sin 5x + C.$$

17. Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле производят по формуле:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Чтобы вновь полученный интеграл $\int vdu$ был проще исходного $\int udv$, нужно удачно выбрать выражения u и dv в заданном интеграле. Часто при этом удобно пользоваться правилами:

- если под интегралом стоит произведение многочлена на синус, косинус или экспоненту, то в качестве и берем многочлен:
- если подынтегральное выражение является произведением многочлена на какую-либо функцию от логарифма, арктангенса или арксинуса, то за и следует

брать именно эту функцию.

ПРИМЕР 29. Найти $\int x^2 \arcsin x dx$.

РЕШЕНИЕ: Обозначим $u = \arcsin x$; $dv = x^2 dx$; тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Подставляя эти выражения в формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Чтобы найти $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, введем новую переменную t по формуле:

$t = \sqrt{1-x^2}$, тогда $t^2 = 1 - x^2$ и $2tdt = -2xdx$;

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(-tdt\right)}{t} = -\int \left(1-t^2\right) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}{3} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \left(3 - 1 + x^2\right) + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \left(2 + x^2\right)$$

Окончательно имеем:

$$\int x^2 \arcsin x dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{9} + \left(2 + x^2\right) + C.$$

Иногда предварительно сделанная замена переменной упрощает задачу интегрирования по частям. Возможны ситуации, когда интегрирование по частям следует применить несколько раз.

18. Интегрирование дробно-рациональных функций от различных выражений

Чтобы проинтегрировать рациональную дробь от аргумента x, ее следует предварительно разложить на сумму простейших дробей. Дробно-рациональная функция от тригонометрических выражений может быть сведена к алгебраической дробно-рациональной функции от нового аргумента t с помощью одной из подстановок: $t = \sin x$; $t = \cos x$; $t = \mathrm{tg}\, x$; $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ (“универсальная” тригонометрическая подстановка).

ПРИМЕР 30. Найти $I = \int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$.

РЕШЕНИЕ: Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; при этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)(t-1)^2}.$$

Разложим дробь, получившуюся под интегралом, на сумму простейших дробей:

$$\frac{4tdt}{\left(1+t^2\right)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}.$$

Приведем выражение в правой части к общему знаменателю и учтем, что числители обеих дробей равны:

$$4t = (At+B)\left(t^2-2t+1\right) + C\left(1+t^2\right)(t-1) + D\left(1+t^2\right)$$

или

$$4t = (A+C)t^3 + (-2A+B-C+D)t^2 + (A-2B+C)t + (B-C+D).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях t в правой и левой частях данного выражения:

$$\left.\begin{array}{ll} t^3: & 0 = A + C \\ t^2: & 0 = -2A + B - C + D \\ t^1: & 4 = A - 2B + C \\ t^0: & 0 = B - C + D \end{array}\right\}$$

Исключим переменную C, учитывая, что C=-A:

$$\begin{cases} -A + B + D = 0 \\ -2B = 4 \\ A + B + D = 0 \end{cases}$$

Теперь из второго уравнения B = -2, из первого и третьего уравнений: A = 0, тогда и C = 0, D = -B = 2. Итак,

$$I = \int\left(\frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{(t-1)^2}\right)dt = -2\int\frac{dt}{1+t^2} + 2\int(t-1)^{-2}\,d(t-1) = -2\operatorname{arctg}t + 2\frac{(t-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - 2\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1} + C = -2\frac{x}{2} - 2\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} + C = -x - \frac{2\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}} + C.$$

Определенный интеграл

Определенный интеграл вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, $F'(x) = f(x)$.

Если в определенном интеграле производится замена переменной, то надо найти пределы интегрирования для новой переменной. При вычислении

определенного интеграла может также использоваться формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

ПРИМЕР 31. Вычислить $I = \int_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}}$.

РЕШЕНИЕ: Введем новую переменную t по формуле: $t = \sqrt[4]{2x-1}$ или $t^4 = 2x-1$, откуда $4t^3dt = 2dx$ (показатель степени у новой переменной выбирается как наименьшее общее кратное показателей корней: в данном случае 4 - наименьшее общее кратное чисел 2 и 4). Из этой же формулы видно, что если $x = 1$, то $t = \sqrt[4]{2-1} = 1$, а при $x = 41$: $t = \sqrt[4]{82-1} = 3$. Поэтому

$$\int_1^{41} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + 3\sqrt[4]{2x-1}} = \int_1^3 \frac{2t^3dt}{\sqrt{t^4} + 3\sqrt[4]{t^4}} = 2\int_1^3 \frac{t^2 - 9 + 9}{t+3}dt = 2\left(\int_1^3 \frac{(t-3)(t+3)dt}{t+3} + 9\int_1^3 \frac{dt}{t+3}\right) =$$

$$= 2\left(\int_1^3 (t-3)dt + 9\int_1^3 \frac{d(t+3)}{t+3}\right) = 2\left[\left(\frac{t^2}{2} - 3t\right)\Big|_1^3 + 9\ln|t+3|\Big|_1^3\right] =$$

$$= 2\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1\right) + 9\ln|3+3| - 9\ln|1+3|\right] = 2\left(-2 + 9\ln\frac{3}{2}\right).$$

Несобственные интегралы

Интеграл называется несобственным в одном из двух случаев:

а) хотя бы один из пределов интегрирования бесконечен;

б) подынтегральная функция имеет бесконечные разрывы внутри промежутка интегрирования или на его концах.

19. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a,+\infty)$ называется предел $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$.

Он обозначается символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, в случаях, если предел бесконечен или не существует, - расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $(-\infty;a]$

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{a} f(x)dx.$$

Наконец, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty,+\infty)$ определяется в виде суммы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

где a – произвольное число, при этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сходится только, если оба интеграла в правой части сходятся.

ПРИМЕР 32. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

РЕШЕНИЕ:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}(A+1) -$$

$$-\operatorname{arctg}(0+1) = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$$

Следовательно, данный интеграл сходится и равен $\pi/4$.

Для выяснения факта сходимости или расходимости несобственного интеграла часто используются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. В этом случае говорят, что интеграл сходится абсолютно.

ТЕОРЕМА 2. Если на промежутке интегрирования функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ непрерывны, неотрицательны $\varphi(x) \le f(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, а из $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходимости следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

ПРИМЕР 33. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

РЕШЕНИЕ: Заметим, что на всем промежутке интегрирования

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt{x}} \ge \frac{2}{\sqrt{x}} \ge 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{2}{\sqrt{x}} dx = \lim_{A\to+\infty} \left(4\sqrt{x}\right)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(4\sqrt{A} - 4\right) = +\infty.$$

Рассмотренный интеграл расходится. Следовательно, по теореме 2, данный несобственный интеграл также расходится.

20. Несобственный интеграл от неограниченной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке$[a,b)$, а в точке b имеет бесконечный разрыв: $\lim_{x\to b-o} f(x) = \infty$. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$

от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Несобственный интеграл называется сходящимся, если указанный предел существует и конечен, и расходящимся в противном случае.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв на левом конце промежутка интегрирования.

ПРИМЕР 34. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx$.

РЕШЕНИЕ: Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке 0. поэтому

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1 \frac{x^{3/2}+x^{1/2}}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_0^1 x^{1/2}dx + \int_0^1 x^{-1/2}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+2x^{1/2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{3}+2-\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}+2\varepsilon^{1/2}\right)\right) = 2\frac{2}{3}.$$

ПРИМЕР 35. Определить, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_3^5 \frac{x\cos x}{\sqrt{x^2-9}}dx .$$

РЕШЕНИЕ: Интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 3$ на всем промежутке интегрирования

$$\left|\frac{x\cos x}{\sqrt{x^2-9}}\right| \le \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \text{ так как } |\cos x| \le 1,\ x > 0.$$

Рассмотрим интеграл $\int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$. Сделаем в нем замену $t=\sqrt{x^2-9}$, тогда $x^2=t^2+9$, $xdx=tdt$ и при x = 3, t = 0, а при x = 5, t = 4. Тогда

$$\int_3^5 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}} = \int_0^4 \frac{tdt}{t} = t\Big|_0^4 = 4.$$

Этот интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл сходится абсолютно и по теореме 1 – сходится.

Геометрические приложения определенного интеграла

Рассмотрим приложения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг кривых.

21. Вычисление площадей плоских фигур

Если фигура ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, а снизу графиком $y=\varphi(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 8), то ее площадь находится по формуле

$$S=\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]dx.$$

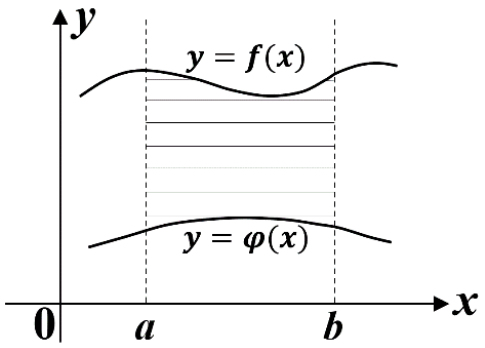

Рис. 8

ПРИМЕР 36. Вычислить площадь круга радиуса R.

РЕШЕНИЕ: Круг определяется неравенствами $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$, $-R \le x \le R$. В таком случае $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $\varphi(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$, x изменяется от -R до R. Тогда

$$S=\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2-x^2}-\left(-\sqrt{R^2-x^2}\right)\right]dx=\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Сделаем в этом интеграле замену $x=R\sin t$, тогда $dx=R\cos t dt$, $\sqrt{R^2-x^2}=R\cos t$, и при $x=-R$, $t=-\pi/2$, а при $x=R$, $t=\pi/2$. Тогда

$$S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2R\cos t R\cos t dt=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t dt=2R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=R^2\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=R^2\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi R^2.$$

ПРИМЕР 37. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенствами:

$$y \le 2-x^2,\ y \ge x,\ y \ge -x.$$

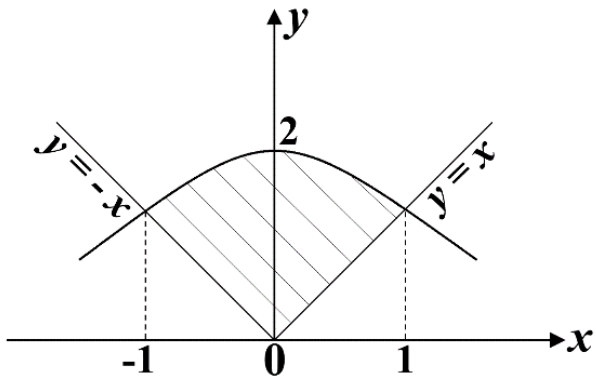

Рис. 9

РЕШЕНИЕ: Описанная фигура лежит под параболой и над биссектрисами 1-го и 2-го координатных углов (рис. 9). Для вычисления ее площади разобьем промежуток интегрирования на два:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(2-x^2-(-x)\right)dx+\int_{0}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{7}{3}$$

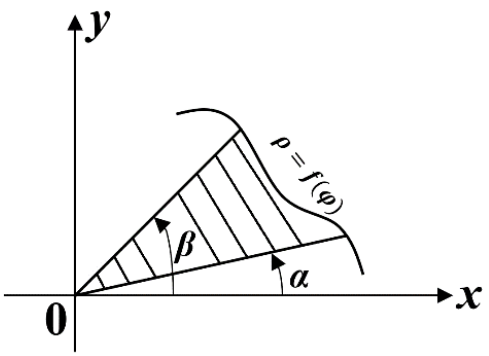

Рис.10

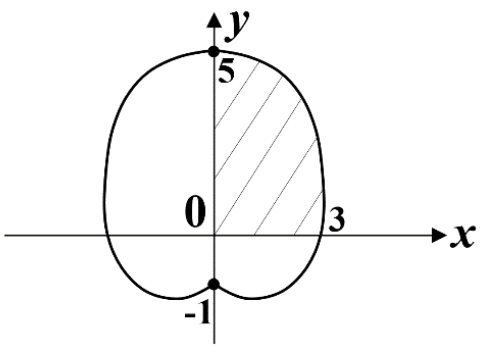

Рис.11

В полярной системе координат площадь сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой, заданной непрерывной функцией $\rho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ (рис. 10, 11), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi .$$

ПРИМЕР 38. Вычислить площадь круга радиуса *R*, используя полярные координаты.

РЕШЕНИЕ: В полярных координатах уравнение окружности радиуса *R* с центром в полюсе имеет вид $\rho = R\,(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Тогда для площади круга имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} R^2 d\varphi = \frac{R^2}{2}\varphi\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{R^2}{2}2\pi = \pi R^2 .$$

ПРИМЕР 39. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2\sin\varphi + 3$ и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

РЕШЕНИЕ: Вид фигуры, ограниченной данной кардиоидой, представлен на рис.11. Согласно условию, требуется найти площадь заштрихованной части фигуры, для которой полярный угол изменяется от 0 до π/2). Тогда искомая площадь будет равна

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2\sin\varphi+3)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(4\sin^2\varphi+12\sin\varphi+9\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(4\frac{1-\cos2\varphi}{2}+12\sin\varphi+9\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin2\varphi-12\cos\varphi+11\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\pi+12\right)=\frac{11}{4}\pi+6.$$

22. Вычисление длин дуг кривых

Если плоская дуга задана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \text{где}\ (\alpha\le t\le\beta),$$

и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, не обращающиеся в ноль одновременно, то длина дуги

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\varphi'(t)]^2}\,dt.$$

ПРИМЕР 40. Вычислить длину окружности радиуса *R*.

РЕШЕНИЕ: Окружность радиуса *R* задается в параметрическом виде уравнениями $x=R\cos t\quad y=R\sin t$, где $t\in[0,2\pi]$, тогда

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{R^2\cos^2t+R^2\sin^2t}\,dt=R\int_0^{2\pi}dt=Rt\Big|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

Если дуга задана в явном виде уравнением $y=f(x)$, $(a\le x\le b)$, то

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dx. \qquad (4)$$

ПРИМЕР 41. Вычислить длину окружности радиуса *R*, используя формулу (4).

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим четверть окружности радиуса R с центром в начале координат, расположенную в первом координатном угле. Она задается уравнением $y=+\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[0,R]$. Тогда $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ и для длины окружности получаем

$$L=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Этот интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв на правом конце отрезка интегрирования. Вычислим его:

$$L=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}4R\int_0^{R-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to0}4R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^{R-\varepsilon}=4R\frac{\pi}{2}=2\pi R.$$

Если плоская дуга задана в полярных координатах уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, где функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, а начальная и конечная точки дуги имеют полярные углы α и β соответственно, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho'(\varphi)]^2+[\rho(\varphi)]^2}\,d\varphi. \quad (5)$$

ПРИМЕР 42. Вычислить длину окружности радиуса R, используя формулу (5).

РЕШЕНИЕ: Окружность радиуса R с центром в полюсе системы координат задается уравнением $\rho=R\,(0\le\varphi\le2\pi)$. Тогда $\rho'=0$ и длина

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+R^2}\,d\varphi=R\int_0^{2\pi}d\varphi=R\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi R.$$

23. Вычисление объемов тел вращения

Если плоская дуга *AB* задана уравнением $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$, причем *f*(*x*) неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой *AB*, вокруг оси *Ox* может быть вычислена по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Если плоская дуга *CD* задана уравнением $x = \varphi(y)$, $(c \le y \le d)$, причем $\varphi(y)$ неотрицательна, то объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, расположенной под дугой *CD*, вокруг оси *Oy* может быть вычислена по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

ПРИМЕР 43. Вычислить объем шара радиуса *R*.

РЕШЕНИЕ: Шар радиуса *R* может быть получен вращением полукруга $y \le +\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$, вокруг оси *Ox*. Тогда для объема шара имеем

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-R}^{R} = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3}\pi R.$$

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Переменная *z* называется функцией независимых переменных *x*, *y* в множестве *E*, если каждой паре (*x*,*y*) значений этих переменных из *E* ставится в соответствие одно определенное значение *z*.

Аналогично определяются и функции большего числа переменных.

Частные производные

Для функции нескольких переменных вводится понятие частной производной по каждому из аргументов. Если $z = f(x,y)$, то по определению $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ – частная производная z по x в точке

Аналогично определяется и частная производная по y

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

При вычислении частных производных все аргументы функции, за исключением той, по которой производится дифференцирование, считаются постоянными (константами). При вычислении частных производных применяются те же приемы, что и при вычислении обыкновенных производных.

ПРИМЕР 44. Вычислить z'_x и z'_y для функции $z = f(x,y) = xy^2 \sin x$.

РЕШЕНИЕ: Найдем z'_x.

Считаем y^2 величиной постоянной, выносим его за знак производной. Дифференцируем $x\sin x$ по x как произведение.

$$z'_x = y^2 (x\sin x)'_x = y^2 (x' \sin x + x(\sin x)') = y^2 (\sin x + x\cos x).$$

Для z'_y получаем

$$z'_y = x\sin x (y^2)'_y = x\sin x \cdot 2y = 2xy\sin x$$

Частные производные второго порядка – это частные производные от производных первого порядка. Например:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}\,;\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}\,.$$

Если функция $z=f(x,y)$ обладает в некоторой точке непрерывными частными производными z_{xy} и z_{yx}, то эти производные равны. Аналогичный факт справедлив и для производных более высоких порядков и для большего числа аргументов, что позволяет выбирать порядок дифференцирования.

ПРИМЕР 45: Вычислить $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ для функции $u=e^{x/z}\sin y$.

РЕШЕНИЕ: По определению частных производных высших порядков, можно найти искомую производную следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x/z}\sin y\right)=(\sin y)\left(e^{x/z}\right)'_x=\frac{\sin y}{z}e^{x/z}\,;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin y}{z}e^{x/z}\right)=\frac{1}{z}\cos y\cdot e^{x/z}\,;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\cos y\cdot e^{x/z}\right)=\cos y\left[-\frac{1}{z^2}e^{x/z}+\frac{1}{z}e^{x/z}\left(-\frac{x}{z^2}\right)\right]=$$

$$=-\left(\frac{1}{z^2}e^{x/z}+\frac{xe^{x/z}}{z^3}\right)\cos y=-\frac{x+z}{z^3}e^{x/z}\cos y\,.$$

Если функция y от x задана неявно уравнением типа $F(x,y)=0$, то производная y по x вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},$$

где $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ - частные производные от $F(x,y)$ по x, y соответственно.

ПРИМЕР 46. Вычислить y'_x и дифференциал dy, если $F(x,y)=e^y+xy=0$.

РЕШЕНИЕ: В данном случае $F'_x=y$, а $F'_y=e^y+x$. Тогда

$$y'_x=-\frac{y}{e^y+x};\ dy=-\frac{y}{e^y+x}dx.$$

Если функция z от x, y задана неявно уравнением типа $F(x,y,z)=0$, то частные производные z по x, y могут быть вычислены из соотношений

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \quad (6)$$

Полный дифференциал

Если функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x,y)$, то ее полным дифференциалом в этой точке называется выражение

$$\partial z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

ПРИМЕР 47. Найти полный дифференциал dz в точке $M_0(0,\pi/4,1)$ для функции $z(x,y)$, заданной уравнением $zy-\mathrm{arctg}(xz)=\pi/4$.

РЕШЕНИЕ: Поскольку функция $z(x,y)$ задана неявно, то ее частные производные z'_x, z'_y можно найти, используя соотношения (6), где $F(x,y,z)=zy-\mathrm{arctg}(xz)-\pi/4$. Тогда

$$F'_x=-\frac{z}{1+x^2z^2};\ F'_y=z;\ F'_z=y-\frac{x}{1+x^2z^2}.$$

В точке $M_0(0,\pi/4,1)$ $F'_x(M_0)=-1$, $F'_y(M_0)=1$, $F'_z(M_0)=\pi/4$. Следовательно, в этой точке $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=4/\pi$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-4/\pi$ и полный дифференциал

$$dz(M_0)=4/\pi\,dx-4/\pi\,dy=4/\pi(dx-dy).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в ограниченной области

Если функция нескольких переменных определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области, то она может принимать наибольшее и наименьшее значения либо внутри области в точках экстремума, либо на границе области.

Решение задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных $z(x,y)$ в замкнутой ограниченной области D рекомендуется проводить по следующему плану:

- найти точки внутри области, в которых выполняются необходимые условия экстремума $z'_x=0$ и $z'_y=0$, вычислить значения функции в этих точках;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области (обычно этот этап решения сводится к поиску наибольших и наименьших значений функции одной переменной на отрезках);
- сравнить полученные значения функции, выбрать из них наибольшее и наименьшее.

ПРИМЕР 48. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+y^2-6y+1$ в замкнутой ограниченной области D, заданной неравенствами $y\le 4-x^2$; $y\ge 0$.

РЕШЕНИЕ: Исследуемая область D изображена (см.рис.12.).

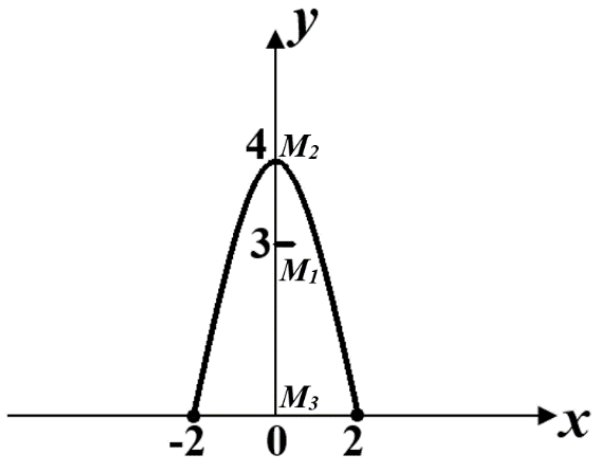

Рис.12

1. На первом этапе найдем стационарные точки функции z внутри области D и значения функции в этих точках. Для этого частные производные $z'_x = 4x$ и $z'_y = 2y - 6$ приравняем нулю и решим полученную систему уравнений: $\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y - 6 = 0 \end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 3$. Стационарная точка $M_1(0,3)$ расположена внутри области и $z(M_1) = -8$.

2. Исследуем функцию на границе области:

а) В точках параболы $y(x) = 4 - x^2$, $(-2 \le x \le 2)$ функция z после подстановки $y = y(x)$ становится функцией одной переменной. Исследуем эту функцию $z = 2x^2 + (4 - x^2)^2 - 6(4 - x^2) + 1 = x^4 - 7$ на замкнутом промежутке $-2 \le x \le 2$: $z'_x = 4x^3 = 0$ => $x = 0$; $x \in (-2, 2)$. При этом $y = (4 - x^2)\Big|_{x=0} = 4$. Значит, заданная функция имеет на участке параболы единственную стационарную точку $M_2(0,4)$. Вычислим $z(M_2) = -7$.

б) На отрезке прямой $y = 0$, $(-2 \le x \le 2)$ функция z принимает вид: $z = 2x^2 + 1$. Найдем ее стационарные точки: $z'_x = 4x = 0$ => $x = 0$; $x \in (-2, 2)$.

При этом $y=0$. Значит, заданная функция имеет на отрезке прямой единственную стационарную точку $M_3(0,0)$. Вычислим $z(M_3)=1$.

в) Вычислим значения функции z в точках $A(-2,0)$ и $C(2,0)$: $z(A)=9$, $z(C)=9$.

3. Сравнивая найденные значения функции $z(x,y)$:

$$z(M_1)=-8;\ z(M_2)=-7;\ z(M_3)=1;\ z(A)=9;\ z(C)=9;$$

делаем вывод, что данная функция достигает в заданной области наименьшего значения в точке M_1, а наибольшего в точках A и C: $z(0,3)=-8$; $z(-2,0)=z(2,0)=9$.

ЗАДАНИЕ НА КОНТРОЛЬНУЮ РАБОТУ

1. Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 4x)}{\left(e^{\arcsin x}-1\right)\mathrm{tg}(8x)}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3-\sqrt{7+x}}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\mathrm{arctg}x}-1\right)\sin(9x)}{\ln\left(1+x^2\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+6x^2}-\sqrt{x^4+2x^2}\right)$

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}-1}{\left(1-e^{\mathrm{tg}x}\right)\sin^2 x}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^3-3x^5}{x^5+x-4}$

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(5^x-1\right)\mathrm{tg}^2\sqrt{x}}{\left(1-e^{\mathrm{tg}x}\right)\arcsin\left(x^2\ln 5\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+18x+40}{x^3+64}$

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{arctg}^2(6x)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\sin(9x)}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+20}-x+4\right)$

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin x}-1}{\ln(1+\mathrm{tg}x)}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x+x^3}{2x^3-x^2+1}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\sin\left(e^{5x}-1\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18x+36}{3x^2-15x+18}$

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(x^3\right)}{\mathrm{arctg}\left(x^2\right)\left(1-e^{x^4}\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+7}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin(1-\cos x)\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3-x^4}{6-x+x^5}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x\ln(1-5x)}{\sqrt{1-x^3+x^4}-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{\sqrt{x+4}-\sqrt{24-3x}}$

2. В заданиях а) найти точки разрыва функции, если они существуют; б) найти односторонние пределы в точках разрыва и установить тип точек разрыва; в) сделать схематический чертеж графика функции.

1. $f(x)=4^{\frac{|x+3|x}{x+3}}$

2. $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2+3x-10}$

3. $f(x)=5^{\frac{x+1}{x-2}}$

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{2x^2+6x-8}$

5. $f(x)=\dfrac{3}{1-2^{\frac{|x|}{x}}}$

6. $f(x)=\dfrac{|x-5|}{5x^2-25x}$

7. $f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ 1-x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 1\\ \ln x, \text{ при } x>1\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{4}\\ \operatorname{tg} x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{4}\\ e^{x-\frac{\pi}{4}}, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{2}{\pi}x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, \text{ при } x>0\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, \text{ при } x\le 0\\ \cos x, \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{2}\\ -x, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

3. Найти первую производную функции.

1. $y = 3^x \arccos 3^x - \sqrt{1-3^{2x}}$

2. $y = x^3 \operatorname{arctg}\left(x^3\right) - \ln\sqrt{1+x^6}$

3. $y = \sqrt{1-x^4} - x^2 \arccos\left(x^2\right)$

4. $y = 2^x \operatorname{arcctg}\left(2^x\right) + \ln\sqrt{1+4^x}$

5. $y = \ln\left(\sin^3 x\right) - 3x\operatorname{ctg}x$

6. $y = 2\sqrt{x}\,\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\cos^3\sqrt{x}} - \operatorname{tg}^2\sqrt{x}$

7. $y = \ln\left(\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right) - \dfrac{2x}{\sin x}$

8. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\right)$

9. $y = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\right) + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$

10. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^3-1} + \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x^3}$

4. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x = 3^{-\cos^2 t} \\ y = 3^{-\sin^2 t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 3\cos^2 2t \\ y = 2\sin^3 2t \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \arcsin(\ln t) \\ y = \sqrt{1-\ln^2 t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}^2 5t \\ y = \ln(\cos 5t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2t^2}\right) \\ y = \ln\left(4t^4+1\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \arccos\left(e^t\right) \\ y = \sqrt{1-e^{2t}} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{t^3+1} \\ y = \dfrac{t}{2}\left(2-t^3\right) \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 2^{t-1} \\ y = \sin\left(2^t\right) \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = e^{t^2+2t} \\ y = t^2 e^{2t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln\left(\sin^2 t\right) \\ y = 2\cos^4 t \end{cases}$

5. Найти пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{tg}x-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos x}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln 2x)^{1/\ln x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)}$

6. Исследовать заданную функцию и сделать схематический чертеж ее графика.

1. $y=xe^{2x-1}$

2. $y=\frac{x^2}{x+1}$

3. $y=\frac{5}{x^2-x-6}$

4. $y=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$

5. $y=x-\sqrt[3]{x^2}$

6. $y=e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

7. $y=x^2+\frac{2}{x}$

8. $y=6x^2\ln x$

9. $y=\frac{x^2+4}{x^2}$

10. $y=\frac{4x}{4+x^2}$

7. Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{e^{3\arcsin x} + x - 4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$

2. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 3\sin(2\ln x) - \ln^2 x}{x}dx$ б) $\int \mathrm{tg}^4 x dx$

3. а) $\int \frac{\cos^3 x - e^{2\mathrm{tg}x} + \sqrt{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$ б) $\int \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx$

4. а) $\int \frac{xe^{\sqrt{1+x^2}} + \sin 3x\sqrt{1+x^2} - 4x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ б) $\int x^2 e^{-2x}dx$

5. а) $\int \frac{\sqrt{\sin x}\cos x + 4e^{-5\mathrm{ctg}x} - \mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}dx$ б) $\int \frac{\sin x + \cos x}{4-(\cos x - \sin x)^2}dx$

6. а) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}x} + 3\sin 2x(1+x^2) - e^{4\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$ б) $\int \frac{\sin x\cos x}{(3+\cos x)^2}dx$

7. а) $\int \frac{\sqrt{\cos x} + 3 + 2\mathrm{tg}x}{\mathrm{ctg}x}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$

8. а) $\int \frac{3x + 7 - 2\cos(\ln(1+x)) - e^{4\mathrm{arctg}x}}{1+x}dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

9. а) $\int \frac{4\sin x - \sqrt{\cos x}e^{-2\mathrm{tg}x} + 3\sin^2 x\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}}dx$ б) $\int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$

10. а) $\int \frac{-5\mathrm{ctg}x + \sqrt{\sin x} + 3}{\mathrm{tg}x}dx$ б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x - \cos^3 x}$

8. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{3}^{66} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-2}}$

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

3. $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{8-x^2}\,dx$

4. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

5. $\int\limits_{1}^{8} \frac{1+2\sqrt[3]{x}dx}{3\sqrt{x}}$

6. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x-1}{x^2-4x+5}dx$

7. $\int\limits_{1}^{5} \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

8. $\int\limits_{1}^{e} \ln^3 x dx$

9. $\int\limits_{0}^{2} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$

10. $\int\limits_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$

9. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(1+x)^3}$

2. $\int\limits_{-3}^{2} \frac{5dx}{(x+3)^3}$

3. $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2+4x+8}$

4. $\int\limits_{1}^{3} \frac{xdx}{3-x}$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

6. $\int\limits_{1}^{e} \frac{4dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$

7. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\sin^2 x}}$

8. $\int\limits_{1}^{3} \frac{e^x}{3-x}dx$

9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2-x}}dx$

10. $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1+\cos^2 x}{x^4+1}dx$

10. 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки A(2;0) до точки B(6;8).

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$. Сделать рисунок.

3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{3-x}$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$. Сделать рисунок.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy* плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{3-x}$, $x=0$, $y=4$. Сделать рисунок.

5. Вычислить площадь части круга $r=2\cos\varphi$ между лучами $\varphi=\frac{\pi}{6}$ и $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Сделать рисунок.

6. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *Ox* дуги кривой $y=2\sqrt{3-x}$, $-5<x<3$. Сделать рисунок.

7. Вычислить длину кардиоиды $r=3(1-\cos\varphi)$. Сделать рисунок.

8. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* плоской фигуры, ограниченной линиями $y=x\sqrt{3-x^2}$ и $y=0$ при $0\le x\le\sqrt{3}$.

9. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x=3\cos^3 t \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$ при $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $3y=2(9-x^2)$ и $6y=9-x^2$. Сделать рисунок.

11. Для функции $u = u(x, y, z)$ найти $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ в точке *A*.

1. $u = z^3 e^{y^2 x - 5} + xy + z, \quad A(5, -1, 2);$
2. $u = (3z^2 + 1)2^{xy} + \pi x, \quad A(3, 0, 1);$
3. $u = z^5 \operatorname{arctg}(xy) + 4xyz - \ln 2, \quad A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1);$
4. $u = x^5 \operatorname{ctg}(zy) - 5xy^2 + 4yz - 2, \quad A(\frac{1}{2}, 1, \frac{\pi}{2});$
5. $u = y\ln(xy + z) - xe^z + 3y, \quad A(4, \frac{1}{2}, -1).$

Найти в точке *A* полный дифференциал функции $z(x, y)$, заданной неявно.

6. $\frac{z^2}{2} + \cos yz = e^{-\frac{y}{z}} - x^2 + 6, \quad A(1, 0, -2);$
7. $\arccos(xy) - \ln(yz) = \frac{\pi}{6} + z^2 - 4, \quad A(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 2);$
8. $\operatorname{arctg}\frac{x}{z} - xyz + \frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}z = \frac{\pi}{2}, \quad A(1, \frac{\pi}{4}, 1);$
9. $\sin(xz) = \operatorname{tg} y + xyz + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A(\frac{\pi}{3}, 0, 1);$
10. $ye^{xz} = z^4 y + y^2 + \ln x, \quad A(1, 2, 0).$

12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ в указанной замкнутой области *D*.

1. $z = 4x^2 + 2y^2 - x + \frac{1}{2}, \quad D: y \le 1 - x^2, y - x \ge -1;$
2. $z = x^2 + 2y^2 + y, \quad D: y \le -x^2, y - x \ge -2;$
3. $z = 3y^2 - xy + 4y + 2, \quad D: x \ge y^2 - 1, x + y \le 1;$

4. $z = x^2 + 2y^2 + 6x - 8, \quad D: x \geq y^2 - 4, x + y \leq -2;$

5. $z = 2x^2 + y^2 + 6x - 3, \quad D: y \geq x^2 - 4, x \leq -2 - y;$

6. $z = 4x^2 - 3y^2 + 4x + 1, \quad D: y \geq x^2 - 1, x + y \leq 1;$

7. $z = 3x^2 + 2y^2 + 4x - 2, \quad D: y^2 \leq 1 - x, x \geq -3;$

8. $z = x^2 + 4y^2 - 7x, \quad D: y \leq 4 - x^2, y \geq 0;$

9. $z = 2x^2 + 4y^2 - y + \frac{1}{16}, \quad D: x \leq 1 - y^2, x - y \geq -1;$

10. $z = x^2 - 2y^2 + 3y - 1, \quad D: y \geq x^2 - 2, y \leq 2.$

Литература

а) основная литература:

1. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.2. – М.: Высшая школа, 1981.
3. Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.4. Изд. 2-е, испр. – М.: Едиториал Урсс, 2005.
4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Функции многих переменных. Ст.-Петербург, 1994.
5. Шуб-Сизоненко Ю.А., Лаптева И.П. Сборник задач по векторному анализу. Издание ВВИА им. Проф. Н.Е.Жуковского, 1972.\

б) дополнительная литература:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.3.-М.: Наука, 1969.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, т.2. – М.: Наука, 1973.
3. Береславский Э.Н. Теория поля Ч.1-3. Учебное пособие/Академия ГА. СПб, 2005

Печатается в авторской редакции

Подписано к печати 09. 06. 2018. Формат бумаги 60x90 1/16.
Тираж 100. Уч.-изд.л.4,0. Усл.печ.л.4,0. Заказ 434. С 39
Тип. Университета ГА. 196210. С.-Петербург, ул. Пилотов, дом 38.