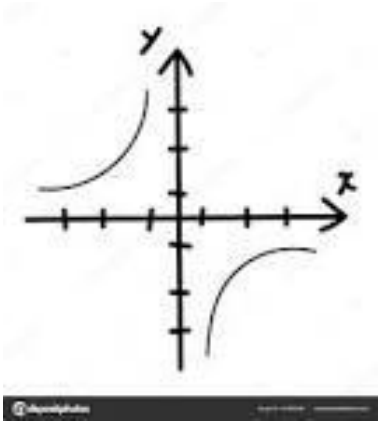
Министерство транспорта Российской Федерации (Минтранс России)
Федеральное агентство воздушного транспорта (Росавиация)
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации»



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания по изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы
Для студентов заочного факультета
Направление подготовки
38.03.01 «Экономика»
Профиль подготовки ЭПО

Санкт-Петербург
2018

Одобрено и рекомендовано к изданию
Учебно-методическим советом Университета

Ш 87(03)

«Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: Методические указания по изучению дисциплины и выполнению контрольной работы/ Университет ГА, С.-Петербург, 2018.

Издаются в соответствии с рабочей программой дисциплины «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Содержат основные положения, программу дисциплины, требования к уровню освоения дисциплины, задание на контрольную работу, вопросы для самопроверки и список литературы.

Предназначены для студентов заочного факультета направления подготовки 38.03.01 «Экономика», профиля подготовки «Экономика предприятия и организация воздушного движения».

Ил. 12, библ. 12 назв.

Составитель Е.В.Скакун, ст. преп.

Рецензент Я.М.Далингер, канд.техн.наук, доцент

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Порядок выполнения контрольных работ.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала по учебнику. Следует также внимательно разобрать решение тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме.

Темы указаны в соответствии с программой курса "Линейная алгебра и аналитическая геометрия". При выполнении работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия, имя, отчество студента, полный шифр, номер контрольной работы и дата её отправки в институт. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. При необходимости следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул и теорем, которые используются при решении задач. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3-4 см.

2. После получения работы (как зачтённой, так и незачтённой) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачёта студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

3. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтённые контрольные работы.

4. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, если шифр

980327, то студент выполняет в контрольной работе вариант № 7 каждого задания.

5. Если в процессе изучения материала или при решении задач у студента возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то можно обратиться к преподавателю для получения устной или письменной консультации.

2. Программа дисциплины "Линейная алгебра и аналитическая геометрия."

I. Элементы линейной алгебры.

1. Определители и их основные свойства. Миноры и алгебраические дополнения.

2. Матрицы и действия над ними. Обратная матрица.

3. Системы линейных уравнений. Метод Крамера. Линейные однородные системы, их нетривиальные решения.

4. Матричная запись систем линейных уравнений. Матричный метод решения и метод Гаусса.

II. Основы векторной алгебры.

5. Прямоугольная система координат в пространстве. Расстояние между двумя точками.

6. Скалярные и векторные величины. Линейные операции над векторами. Координаты вектора. Длина вектора. Проекция вектора на ось.

7. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их основные свойства и выражения в координатной форме.

III. Аналитическая геометрия.

8. Прямоугольная система координат на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном соотношении. Линии и их уравнения.

9. Уравнения прямой линии на плоскости; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две данные точки; общее уравнение прямой. Угол между прямыми; условия параллельности и перпендикулярности. Пересечение двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

10. Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы. Фокусы и эксцентриситет. Асимптоты гиперболы. Сопряженная гипербола.

11. Полярная система координат. Связь между прямоугольными и полярными координатами. Уравнение линии в полярных координатах.

12. Плоскость. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор плоскости. Угол между плоскостями. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. Расстояние от точки до плоскости.

13 Прямая в пространстве. Уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две данные точки. Общее уравнение прямой. Каноническое уравнение прямой, направляющий вектор. Угол между прямыми. Параметрическое уравнение прямой.

14. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Точка пересечения прямой и плоскости.

15. Уравнение поверхности. Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номера зачетной книжки или студенческого билета). Например: шифр **ЭПО – 0914.3546** то студент выполняет в контрольной работе вариант **№ 6** каждого задания.

1. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Две взаимно перпендикулярные оси *OX* и *OY*, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба (рис. 1), образуют прямоугольную (или декартову) систему координат на плоскости. Пусть *M* – произвольная точка плоскости. Опустим из неё перпендикуляры *MA* и *MB* на оси *OX* и *OY* соответственно.

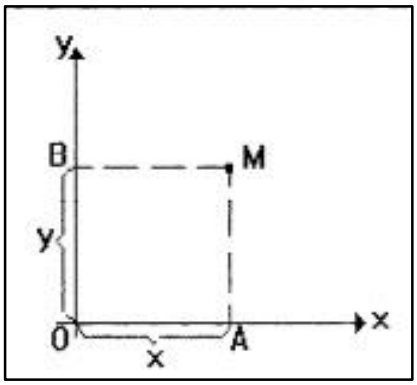


Рисунок 1

Прямоугольными координатами *x* и *y* точки *M* называются величины *OA* и *OB*:

$x = OA;\ y = OB$

Таким образом, каждой точке *M* плоскости соответствует пара чисел *(x, y)* – её прямоугольные координаты.

2. Расстояние *d* между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. <u>Площадь</u> S треугольника ABC с вершинами $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3;y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}|\{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\}|$$

4. <u>Деление отрезка в данном соотношении.</u> Если т. $M(x; y)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в отношении

$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}, \text{ то } x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

В частности, при делении пополам, то есть в отношении

$$\lambda = 1, \text{ то } x = \frac{x_1+x_2}{2}; y = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

5. <u>Линии первого порядка.</u>

5.1. <u>Уравнение прямой с угловым коэффициентом</u> имеет вид:

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси $OX(k = tg\alpha)$ и называется угловым коэффициентом, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис.2).

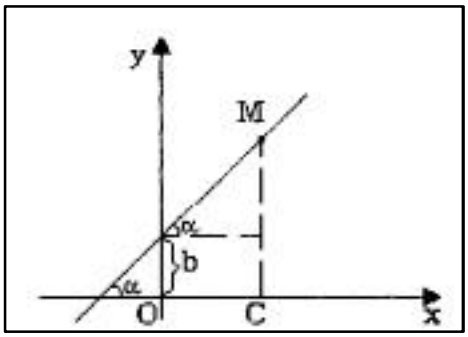


Рисунок 2

Пример 1.

Составить уравнение прямой, отсекающей на оси *OY* отрезок $b = 3$ и образующей с осью *OX* угол $\alpha=\pi/6$.

Решение. Находим

$$k = tg\alpha = tg\pi/6 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя k и b в уравнение (1), получаем

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$$

5.2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (2)$$

5.3. Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3)$$

где A, B, C – произвольные коэффициенты (A и B не равны нулю одновременно).

6. Угол между двумя прямыми.

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\boldsymbol{tg\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}} \qquad (4)$$

Второй угол равен (π - φ).

Условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$\boldsymbol{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

7. Линии второго порядка.

7.1. Эллипс.

Эллипсом называется множество всех точек на плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, больше расстояния между фокусами (рис.3).

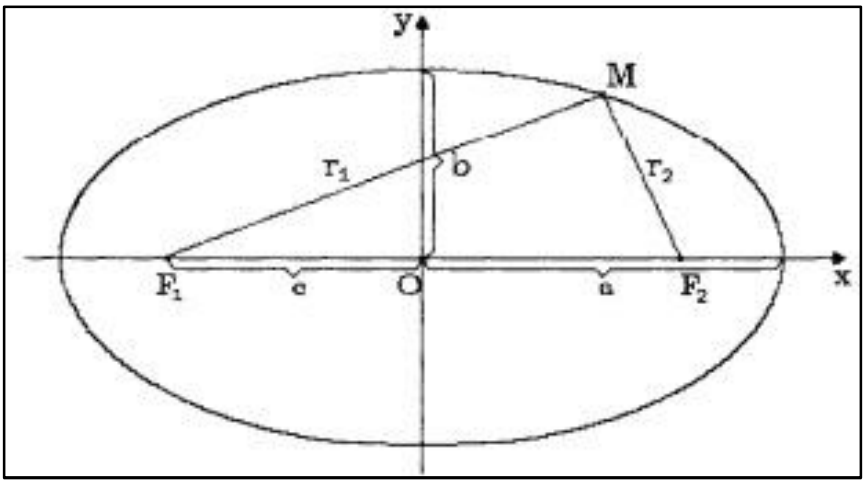


Рисунок 3

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Числа a и b называются полуосями эллипса.

Отношение

$\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ называется эксцентриситетом эллипса

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, если $a > b$ и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, если $b > a$.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x,\ r_2 = a - \varepsilon x.$$

7.2. Гипербола.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньше расстояния между фокусами.

Пусть M – произвольная точка гиперболы. Через r_1 и r_2 обозначают расстояния от точки M до фокусов F_1 и F_2 (рис.4).

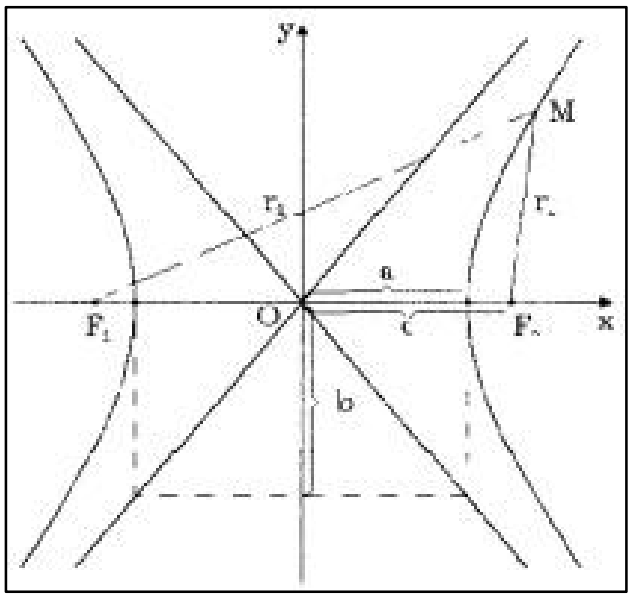


Рисунок 4

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где число a называется действительной, а число b – мнимой полуосями гиперболы. Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется эксцентриситетом гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: $r_1 = |\varepsilon x + a|$, $r_2 = |\varepsilon x - a|$.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ называются асимптотами гиперболы.

7.3. Парабола.

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой.

Пусть M – произвольная точка параболы, F – фокус, d – расстояние от точки M до директрисы, p – расстояние от фокуса до директрисы. Величину p называют параметром параболы (рис.5).

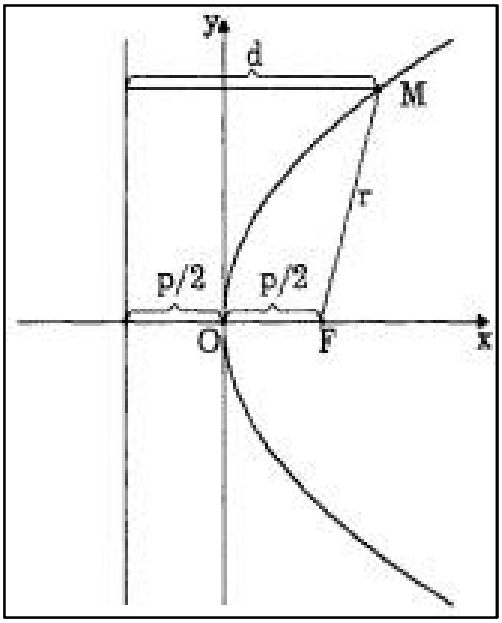


Рисунок 5

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Парабола имеет фокус $F(\frac{p}{2};0)$ и директрису $x = -\frac{p}{2}$; симметрична относительно оси OX. Парабола $x^2 = 2py$ симметрична относительно оси OY.

8. Полярные координаты.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки *O*, называемой полюсом исходящего из нее луча *OE*, называемого полярной осью, и масштаба для измерения длин отрезков.

Пусть задана полярная система координат и пусть *M* – произвольная точка плоскости. Обозначим через *r* расстояние точки *M* от точки *O*, через φ – угол, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM* (рис. 6).

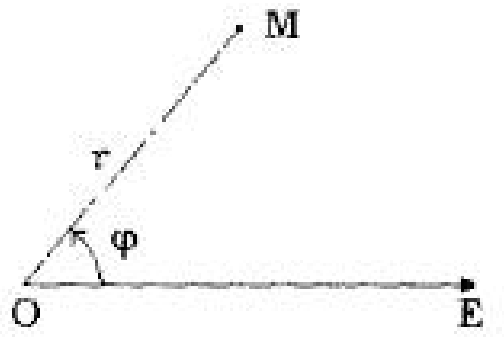


Рисунок 6

Полярными координатами точки *M* называются числа *r* и φ .

Переход от полярных координат точки *M* к прямоугольным осуществляется по формулам: (в том случае, когда начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью)

$$\begin{cases} x = r\,cos\varphi \\ y = r\,sin\varphi \end{cases}$$

а выражение полярных координат через прямоугольные следует из формул:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \qquad (5)$$

Пример 2. Даны прямоугольные координаты точки (2; 2). Найти её полярные координаты.

Решение. По формулам (5) имеем $r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $tg\,\varphi = 1$, откуда $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$. Но так как $x = 2 > 0$ и $y = 2 > 0$,то берём $\varphi = \pi/4$.

2. Аналитическая геометрия в пространстве.

1. Прямоугольная система координат *OXYZ* в пространстве определяется заданием масштабной единицы измерения длин и трёх пересекающихся в одной точке *O* взаимно перпендикулярных осей: *OX*, *OУ* и *OZ*.

2. Понятие вектора.

Направленный отрезок $\overline{AB}$ называется вектором. A – начало, B – конец вектора. Вектор также обозначают и одной буквой, например $\bar{a}$. Длина вектора обозначается $|\,\bar{a}\,|$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Модуль вектора $\bar{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ равен $|\,\bar{a}\,| = \sqrt{a_1^2 a_2^2 a_3^2}$.

3. Линейные операции над векторами.

Суммой $\bar{a} + \bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, который идёт из начала вектора $\bar{a}$ в конец вектора $\bar{b}$, при условии, что конец вектора $\bar{a}$ и начало вектора $\bar{b}$ совпадают (рис. 7).

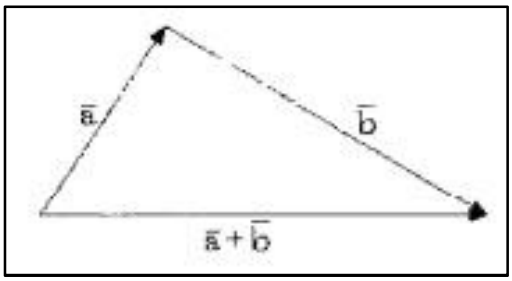


Рисунок 7

<u>Разностью</u> $\bar{b} - \bar{a}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\bar{a}$ даёт вектор $\bar{b}$ (рис. 8).

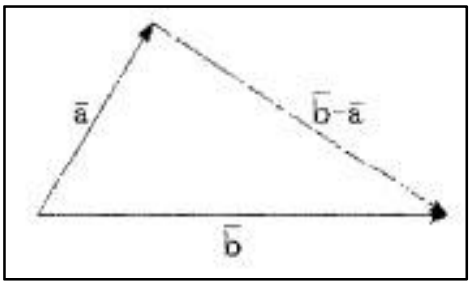


Рисунок 8

<u>Произведением</u> $\lambda \cdot \bar{a}$ ($a \neq 0, \lambda \neq 0$) называется вектор, который коллинеарен вектору $\bar{a}$, направлен так же, как $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$ (рис. 9).

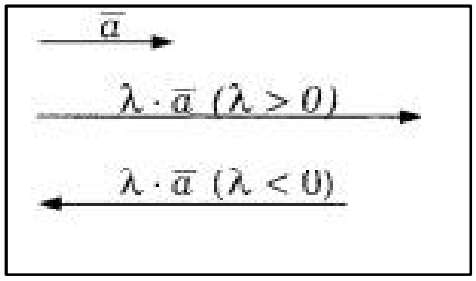


Рисунок 9

4. <u>Скалярное произведение векторов.</u>

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначают $\bar{a} \cdot \bar{b}$,

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

<u>Проекцией</u> вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ является число

$$\text{Пр}_b\, \bar{a} = |\bar{a}|\, cos\, \phi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, то их скалярное произведение определяется формулой:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Пример 1. Найти угол между векторами $\bar{a} = (1;\ 1;\ 0)$ и $\bar{b} = (1; 0; 1)$, а также проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

Решение:

$$cos\ \phi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

следовательно, $\varphi = 60°$. $\text{Пр}_b\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 2. Вычислить $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Решение

$$(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b}) = 3\bar{a} \cdot \bar{a} - 2\bar{b} \cdot \bar{a} + 3\bar{a} \cdot \bar{b} - 2\bar{b} \cdot 2\bar{b}$$

$$= 3|\bar{a}|^2 \cdot cos0° + 4|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos(2\pi/3) - 4|\bar{b}|^2 \cdot cos0°$$

$$= 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1/2) - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 27 - 24 - 64 = -61.$$

5. Векторное произведение.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{a} * \bar{b}$, который определяется тремя условиями:

а) длина вектора $\bar{a} * \bar{b}$ равна $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

б) вектор $\bar{a} * \bar{b}$ перпендикулярен каждому из век- торов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

в) векторы $\bar{a} * \bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ образуют правую тройку векторов (рис. 10).

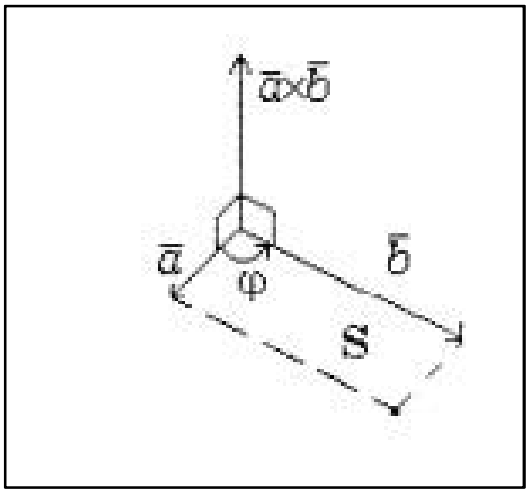


Рисунок 10

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами $\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ определяется формулой:

$$\bar{a} * \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\bar{\imath} - (a_1 b_3 - b_1 a_3)\bar{\jmath} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\bar{k}$$

<u>Площадь параллелограмма</u>, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вычисляется по формуле $S = |\bar{a} * \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\varphi$.

<u>Пример 3.</u> Вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} + 3\bar{b}$ и $3\bar{a} + \bar{b}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$ и угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 30°.

<u>Решение:</u> $(\bar{a} + 3\bar{b}) * (3\bar{a} + \bar{b}) = 3\bar{a} * \bar{a} + 3\bar{b} * 3\bar{a} + \bar{a} * \bar{b} + 3\bar{b} * \bar{b} =$

$$9\bar{b} * \bar{a} - \bar{b} * \bar{a} = 8\bar{b} * \bar{a}$$

Пример 4. Даны векторы $\bar{a} = (2;\ 5;\ 7)$, и $\bar{b} = (1;\ 2;\ 4)$. Найти $\bar{a} * \bar{b}$.

Решение:

$$\bar{a} * \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \cdot 4 - 2 \cdot 7)\bar{\imath} - (2 \cdot 4 - 1 \cdot 7)\bar{\jmath} + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 5)\bar{k}.$$

6. Смешанное произведение векторов.

Смешанным произведением трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ то есть $\bar{a} \cdot (\bar{b} * \bar{c})$. Смешанное произведение обозначают $\overline{abc}$, оно определяется формулой:

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Абсолютная величина смешанного произведения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равна объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Пример 5. Найти объём треугольной пирамиды с вершинами $A\ (2;\ 2;\ 2), B(4;3;3), C(4;5;4), D(5;5;6)$.

Решение:

Объём пирамиды равен 1/6 объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (2;1;1);\ \overline{AC} = (2;3;2);\ \overline{AD} = (3;3;4);\ \overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

Отсюда $V_{\text{пир}} = 7/6$.

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Условие компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ *и* $\bar{c}$: $\overline{abc} = 0$.

7. Уравнение плоскости.

7.1. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Вектор $\overline{N} = (A, D, C)$, перпендикулярный плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости. Угол ϕ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется по формуле: $cos\varphi = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}$, второй угол равен $(180° - \varphi)$.

Уравнение параллельности плоскостей:

$$\overline{N_1} || \overline{N_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$\overline{N_1} \perp \overline{N_2} \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

7.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$; $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Возьмем произвольную точку $M(x; y; z) \in a$ (рис. 11).

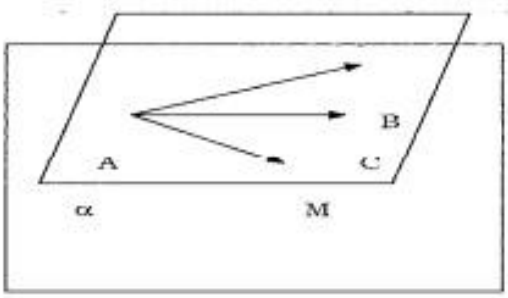


Рисунок 11

Векторы $\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}$ компланарны $\overline{AM} \cdot (\overline{AB} * \overline{AC}) = 0$, следовательно,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Уравнение прямой.

8.1. Прямая определяется совместным заданием уравнений двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

8.2. Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где вектор $\bar{a} = (l, m, n)$ - направляющий вектор прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 12).

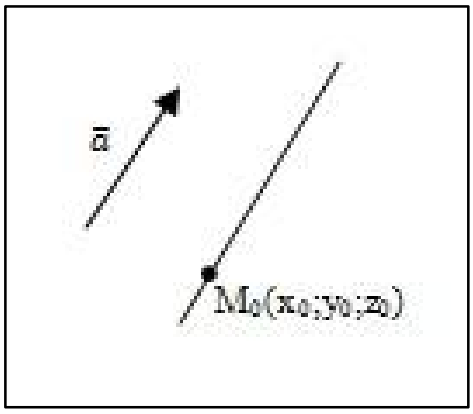


Рисунок 12

8.3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

9. Угол между двумя прямыми.

Угол между двумя прямыми, заданными их каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

определяется по формуле: $cos\varphi = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

10. Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле:

$$sin\varphi = \frac{A\cdot l + b\cdot m + C\cdot n}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$A\cdot l + b\cdot m + C\cdot n = 0;$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;1;1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (2;2;3)$.

Решение: Так как вектор $\overline{N}$ является нормалью для искомой плоскости, то: $2x + 2y + 3z + D = 0$.

Подставляя координаты точки M_0, имеем: $2 + 2 + 3 + B = 0 => B = -7$.

Искомое уравнение имеет вид: $2x + 2y + 3z - 7 = 0$.

3. Элементы линейной алгебры.

1. Определители.

Определителем второго порядка называется число, определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2. Матрицы.

Матрицей размерностью m на n называется таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Обозначается матрица $A\ (m \times n)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы A; i - номер строки, j - номер столбца. Матрица, получаемая из матрицы A переменой местами строк и столбцов, называется транспонированной матрицей и обозначается A^T.

Матрица, у которой $m = n$, называется квадратной.

Квадратная матрица вида: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}$

называется единичной матрицей и обозначается E.

3. Действия с матрицами.

3.1 Сложение матриц.

Можно складывать матрицы одинаковой размерности:
$A\,(m \times n) + B(m \times n) = C(m \times n)$. Элементы матрицы - суммы C определяются формулами: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

3.2 Умножение матрицы на число.

$$\lambda \cdot A\,(m \times n) = B(m \times n).$$

Элементы матрицы B определяются формулами $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

3.3 Умножение матрицы на матрицу.

$$A\,(m \times n) * B(n \times p) = C(m \times p).$$

Если количество столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B, то произведение $A \cdot B$ существует. В противном случае говорят, что $A \cdot B$ не существует.

Элементы матрицы C определяются формулами:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

4. Обратная матрица.

Матрицей, обратной матрице $A(n \times n)$, называется матрица, обозначаемая A^{-1}, для которой выполняется равенство:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обратную матрицу ищут по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где Δ - определитель матрицы A, A_{ij} - <u>алгебраическое дополнение</u> элемента a_{ij} матрицы A. A_{ij} вычисляется по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij};$$

где M_{ij} - <u>минор</u> элемента A_{ij}. M_{ij} получается из Δ вычеркиванием i - ой строки и j - го столбца.

<u>Пример 1.</u> Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}.

<u>Решение:</u> 1) ищем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2. \Delta \neq 0$, поэтому A^{-1} существует.

2) ищем A_{ij}:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1;$

$A_{12} = (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$

$A_{13} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7;$

$A_{21} = (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 9) = 1;$

$A_{22} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1;$

$A_{23} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1;$

$A_{31} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1;$

$A_{32} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7;$

$A_{33} = (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5;$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -9/2 & 1/2 & 7/2 \\ 7/2 & -1/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений $A \cdot A^{-1} = E$.

5. Системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными.

5.1 Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

где a_{ij} - заданные коэффициенты, b_i - свободные члены.

5.2 Метод Крамера.

Считаем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

5.3 Матричный метод.

Выписываем матрицу A системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и находим A^{-1}.

Если A^{-1} существует, то решение ищем по формуле:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$, где B - матрица - столбец свободных членов. $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

Решение: 1) Метод Крамера:

считаем, $\Delta = 2$; $\Delta_x = 2$; $\Delta_y = -2$; $\Delta_z = 4$, тогда $x = 1; y = -1; z = 2$.

2) Матричный метод: выписываем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ считаем } A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -4.5 & 0.5 & 3.5 \\ 3.5 & -0.5 & -2.5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -4.5 & 0.5 & 3.5 \\ 3.5 & -0.5 & -2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 1; y = -1; z = 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите определители второго и третьего порядка; как их вычислить?
2. Дайте определение скалярных и векторных величин.
3. Как найти длину вектора, если известны его координаты?
4. Запишите координатную форму скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Как найти угол между векторами?
5. Что называется матрицей ?
6. Запишите систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными и формулы Крамера для решения системы.
7. В чем суть метода Гаусса решения системы линейных уравнений?
8. В чём заключается суть метода координат?
9. Запишите формулы, выражающие расстояние между двумя точками и деление отрезка в данном отношении.
10. Запишите уравнения прямой линии с угловым коэффициентом и проходящей через две точки на плоскости.
11. Как найти угол между прямыми на плоскости? Запишите условия параллельности и перпендикулярности.
12. Напишите канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
13. Какими параметрами задаются полярные координаты?

14. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три точки и общее уравнение плоскости.

15. Напишите уравнение прямой линии в пространстве, проходящей через две точки.

16. Что такое нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой ?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание №1.

Известны длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; α – угол между этими векторами. Вычислить:

1) $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$,

2) $(5\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot (2\bar{a} - \bar{b})$.

3) Найти площадь треугольника, построенного на векторах $(\bar{a} + 3\bar{b})$ и $(3\bar{a} + \bar{b})$.

Сделать чертеж.

1) $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 2, \alpha = 45°$.

2) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \alpha = 30°$.

3) $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4, \alpha = 60°$.

4) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 3, \alpha = 120°$.

5) $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 1, \alpha = 135°$.

6) $|\bar{a}| = 4, |\bar{b}| = 2, \alpha = 30°$.

7) $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 5, \alpha = 150°$.

8) $|\bar{a}| = 1, |\bar{b}| = 3, \alpha = 60°$.

9) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 6, \alpha = 30°$.

10) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 7, \alpha = 45°$.

Задание №2.

Известны координаты трех вершин A, B, D параллелограмма $ABCD$. Средствами векторной алгебры требуется:

1. Найти координаты точки C – четвертой вершины параллелограмма;

2.Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AD}$;

3. Найти угол между диагоналями параллелограмма;

4. Найти площадь параллелограмма;

5. Найти объём пирамиды, основанием которой является ΔABC, а вершина расположена в начале координат.

1) $A(1;1;1), B(2;3;5), D(3;6;5)$.

2) $A(0;1;0), B(1;2;1), D(-1;0;3)$.

3) $A(2;1;0), B(3;2;-1), D(5;4;2)$.

4) $A(-1;0;2), B(3;4;1), D(2;5;6)$.

5) $A(-7;0;0), B(1;5;\ -1), D(4;3;7)$.

6) $A(0;3;\ -1), B(2;1;4), D(-3;6;2)$.

7) $A(0;0;3), B(5;1;1), D(2;\ -2;1)$.

8) $A(2;2;0), B(5;6;1), D(3;2;\ -1)$.

9) $A(-1;-1;3), B(4;0;0), D(0;5;4)$.

10) $A(1;-1;1), B(4;0;1), D(5;\ -2;4)$.

Задание №3.

Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить:

1) $A^{-1} \cdot (3B^T - 2C)$.
2) $(4B^T - 2A) \cdot C^{-1}$.
3) $(3B^T + 2A) \cdot C^{-1}$.
4) $(B^{-1} - C) \cdot 2A$.

5) $A^T \cdot C^{-1} - 3B$.
6) $A^{-1} - B^T + 2 \cdot (A - C)$.
7) $(B + C)^T - 2A^{-1}$.
8) $(A - 8C^{-1}) - B^T$.
9) $A \cdot B^T - 3C^{-1}$.
10) $4(A + C^T) \cdot B^{-1}$.

Обозначения:

1. A^{-1} - обратная матрица к матрице A;

2. B^T - транспонированная матрица B;

<u>Задание №4.</u>

Решите систему линейных уравнений:

1. Методом Крамера; 2. Матричным методом.

1) $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 5 \\ 2x - 1y - 2z = 1 \\ 1x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1 \\ 3x + y - 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x - y + 3z = -4 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 5x - 2y + z = -1 \\ 2x + y + 2z = 8 \\ x - 3y - z = -5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$

<u>Задание №5.</u>

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 3x + 5y + 2z + 4t = 3 \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 1 \\ 5x + 9y - 2z + 2t = 9 \\ 4x + 7y + 3t = 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 2t = 0 \\ 5x + 7y + 4z + 3t = 0 \\ 4x + 4y + 5z + 3t = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 4t = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 7y + 4z + 3t = 2 \\ 2x + 3y + 3z + 4t = 3 \\ 4x + 5y - z - 6t = -3 \\ 4x + 7y + 5z - 9t = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 9t = 2 \\ 5x + y - z + 2t = -1 \\ 2x - y + z - 3t = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ y + 3z + t = 15 \\ 4x + z + t = 11 \\ x + y + 5t = 28 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x - y + z - 5t = 4 \\ 2x + 3y - 3z + t = 2 \\ 8x - y + z - t = 1 \\ 4x - 3y + 3z + 9t = 2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + 3y + 3z + 5t = -1 \\ 2x + 6y + 5z + 6t = 1 \\ 3x + 7y + 4z + 8t = 2 \\ 3x + 5y + z + 9t = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 3t = 0 \\ 4x + 6y + 9z + 8t = -3 \\ 6x + 9y + 9z + 4t = 8 \\ 2x + 3y + 5z + 5t = -3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 6x - 5y + 7z + 8t = 3 \\ 3x + 11y + 2z + 4t = 6 \\ 9x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 6x - 5y + 7z + 8t = 8 \\ 3x + 11y + 2z + 4t = 6 \\ 4x - 5y + 8z - 8t = 1 \\ x - 3y - 6z + 5t = 0 \end{cases}$

<u>Задание №6.</u>

Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1) длину стороны AB;

2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

3) угол B в радианах с точностью до двух знаков;

4) уравнение высоты CD и её длину;

5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD;

6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB,
7) сделать чертёж.

1) $A(-4;12), B(8;13), C(6;17)$.
2) $A(-3;10), B(9;1), C(7;15)$.
3) $A(4;1), B(16;-8), C(14;6)$.
4) $A(-7;4), B(5;-5), C(3;9)$.
5) $A(0;3), B(12;-6), C(10;8)$.
6) $A(0;2), B(12;-7), C(16;15)$.
7) $A(-9;0), B(3;-3), C(7;19)$.
8) $A(1;0), B(13;-9), C(17;13)$.
9) $A(-4;10), B(8;1), C(12;23)$.
10) $A(2;5), B(14;-4), C(18;18)$.

<u>Задание №7.</u>

1) Даны точки $A(-4;0)$ и $B(0;6)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси OX отрезок, вдвое больший, чем на оси OY. Сделать чертёж.

2) Из начала координат проведены две взаимно перпендикулярные прямые, образующие с прямой $2x + y = a$ равнобедренный треугольник. Найти площадь этого треугольника. Сделать чертёж.

3) Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 2px$ и касающейся её директрисы. Найти точки пересечения параболы и окружности. Сделать чертёж.

4) В треугольнике ABC даны:
1) уравнение стороны AB: $3x + 2y = 12$, 2) уравнение высоты BM: $x + 2y = 4$,
3) уравнение высоты AM: $4x + y = 6$, где M – точка пересечения высот.
Написать уравнение сторон AC; BC и высоты CM. Сделать чертёж.

5) Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y = x - 2$ и $5y = x + 6$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей. Сделать чертёж.

6) Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(0; 2)$, и уравнения высот BM: $x + y = 4$ и CM: $y = 2x$, где M – точка пересечения высот.

7) Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$. Сделать чертеж.

8) Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ и перпендикулярной к прямой $y = 2x$. Сделать чертёж.

9) Написать уравнения биссектрис углов между прямыми $3x + 4y - 1 = 0$ и $4x - 3y + 5 = 0$. Сделать чертёж.

10) Из вершины параболы $y^2 = 2px$ проведены все возможные хорды. Написать уравнения множества середин этих хорд. Сделать чертеж.

<u>Задание №8.</u>

Даны координаты точек A и B и радиус окружности R, центр которой находится в начале координат. Требуется:

1. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через данные точки A и B;
2. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса;
3. Найти все точки пересечения эллипса с данной окружностью;
4. Построить эллипс и окружность.

1) $A(2\sqrt{6}; -4)$, $B(6;\ 2\sqrt{2})$, $R = 2\sqrt{10}$.

2) $A\left(-6;\ 2\sqrt{6}\right)$, $B\left(3\sqrt{2};\ 6\right)$, $R = 8$.

3) $A(\sqrt{6}; -2)$, $B(-3; \sqrt{2})$, $R = 3$.

4) $A(-8; 4)$, $B\left(4\sqrt{7};\ -2\right)$, $R = 4\sqrt{5}$.

5) $A(4; -2)$, $B(2; \sqrt{7})$, $R = 2\sqrt{5}$.

6) $A(-2\sqrt{6}; -4)$, $B(-6;\ 2\sqrt{2})$, $R = 2\sqrt{10}$.

7) $A(-3\sqrt{2}; 6)$, $B(6;\ -2\sqrt{2})$, $R = 8$

8) $A(3; -\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{6};\ 2)$, $R = 3$.

9) $A\left(4\sqrt{7};\ 2\right)$, $B(8;\ -4)$, $R = 4\sqrt{5}$.

10) $A(-2; -\sqrt{7})$, $B(4; 2)$, $R = 2\sqrt{5}$.

<u>Задание №8.</u>

Даны координаты точек A и B. Требуется:

1. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через данные точки A и B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс;
2. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы;
3. Найти все точки пересечения гиперболы с окружностью с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы;
4. Построить гиперболу, её асимптоты и окружность.

1) $A(-3; 4)$, $B(-5; 4\sqrt{5})$.

2) $A(4; -6)$, $B(6; 4\sqrt{6})$.

3) $A(-4; -3)$, $B(8; 9)$.

4) $A(8; 12)$, $B(-6; 2\sqrt{15})$.

5) $A(8; 6)$, $B(10; -3\sqrt{10})$.

6) $A\left(5; -4\sqrt{5}\right)$, $B(3; 4)$.

7) $A\left(-6; 4\sqrt{6}\right)$, $B(4; 6)$.

8) $A(-8; -9)$, $B(4; 3)$.

9) $A\left(6;-2\sqrt{15}\right)$, $B(-8;12)$.

10) $A\left(-10;-3\sqrt{10}\right)$, $B(-8;6)$.

<u>Задание №9.</u>

Построить график функции в полярной системе координат по точкам, придавая ϕ значения через промежуток $\pi/8(0 \leq \phi \leq 2\pi)$.

Найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат (положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью, а полюс – с началом координат).

1) $r = \frac{3}{2+sin\varphi}$.

2) $r = 3cos^2 2\varphi$.

3) $r = sin\varphi + cos\varphi$.

4) $r = 2sin^2 2\varphi$.

5) $r = 4(1 + sin\varphi)$.

6) $r = \frac{1}{2+cos\varphi}$.

7) $r = 5(1 - cos\varphi)$.

8) $r = \frac{3}{1-2cos\varphi}$.

9) $r = 4(1 + cos\varphi)$.

10) $r = \frac{2}{2-cos\varphi}$.

<u>Задание №10.</u>

Даны точки A, B, C, D. Требуется найти:

1. Уравнение плоскости (Q), проходящей через точки A, B, C и проверить, лежит ли точка D в плоскости (Q);

2. Уравнение прямой (I), проходящей через точки B и D;

3. Угол между плоскостью (Q) и прямой (I);

4. Уравнение плоскости (P), проходящей через точку A перпендикулярно прямой (I);

5. Угол между плоскостями (P) и (Q);

6. Уравнение прямой (m), проходящей через точку A в направлении ее радиус-вектора;

7. Угол между прямыми (I) и (m).

1) $A(1;-3;1), B(-3;2;-3), C(-3;-3;3), D(-2;0;-4)$.

2) $A(1;--1;6), B(4;5;-2), C(-1;3;0), D(6;-1;5)$.

3) $A(1;1;1), B(3;4;0), C(-1;5;6), D(4;0;5)$.

4) $A(-1;-1;-1), B(5;2;0), C(2;5;0), D(1;2;4)$.

5) $A(7;1;2), B(-5;3;-2), C(3;3;5), D(4;5;-1)$.

6) $A(-2;3;-2), B(2;-3;2), C(2;2;0), D(1;5;5)$.

7) $A(3;1;1), B(1;4;1), C(1;1;7), D(3;4;-1)$.

8) $A(4;-3;-2), B(2;2;3), C(2;-2;-3), D(-1;-2;3)$.

9) $A(5;1;0), B(7;0;1), C(2;1;4), D(5;5;3)$.

10) $A(4;2;-1), B(3;0;4), C(0;0;4), D(5;-1;-3)$.

ЛИТЕРАТУРА

а) основная литература:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975 г.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984 г.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1981 г.

4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1974 г.

5. Задачи и упражнения по аналитической геометрии М., 1968.

6. Шнейдер В.Е. и др. Краткий курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1978. т.1 и т.2.

7. Высшая математика. Методические указания к изучению темы „Элементы линейной алгебры" - Л.: ОЛАГА, 1985.

8. Высшая математика. Методические указания к изучению темы „Элементы аналитической геометрии" - Л.: ОЛАГА, 1984.

9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) - М.: Высшая школа, 1983.

б) дополнительная литература:

1. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984 г.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1986.

3. Данко Т.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, части I и П. -М.: Высшая школа, 1980.

Печатается в авторской редакции

Подписано к печати 15. 05. 2018. Формат бумаги 60x90 1/16.
Тираж 80. Уч.-изд.л.2,25. Усл.печ.л.1,2. Заказ 411. С 32
Тип. Университета ГА. 196210. С.-Петербург, ул. Пилотов, дом 38.