

**Министерство транспорта Российской Федерации
(Минтранс России)**

**Федеральное агентство воздушного транспорта
(Росавиация)**

**ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет
гражданской авиации»**

Э. Н. Береславский, Я. М. Далингер, В. Д. Павлов, Т. В. Соловьева

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2014**

Ш87(03)

Береславский Э. Н. , Далингер Я. М. , Павлов В. Д. , Соловьева Т. В.
Численные методы. Учебное пособие/Университет ГА. С.-Петербург,
2014.

Содержит краткий теоретический материал основных разделов учебной дисциплины «Численные методы»: интерполирование, эмпирические формулы, решение нелинейных уравнений, численное интегрирование, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, решение дифференциальных уравнений в частных производных. Приводятся примеры вычислений с использованием прикладного математического пакета Mathcad.

Предназначено для студентов ВУЗов, обучающихся по направлениям «Аэронавигация» и «Эксплуатация воздушного транспорта» изучающих дисциплины «Математика» и «Моделирование» а также для студентов ВУЗов обучающихся по направлению «Прикладная математика» (специализация «Математическое моделирование процессов управления на транспорте»), изучающих дисциплину «Численные методы». Может использоваться для самостоятельного изучения дисциплины «Численные методы».

Ил. 6. Библ. 29 назв. Прил. 2.

Рецензенты:

П. В. Герасименко, заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук, профессор кафедры математики и моделирования ПГУПС.

С.А.Исаев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики СПбГУГА.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Интерполирование	6
<i>Интерполяционная формула Лагранжа</i>	7
<i>Схема Эйткена</i>	8
<i>Интерполяционная формула Ньютона</i>	9
<i>Задача 1.</i>	13
<i>Задача 2</i>	16
<i>Задача 3</i>	20
2. Эмпирические формулы	25
<i>Метод наименьших квадратов</i>	25
<i>Задача 4</i>	27
3. Решение нелинейных уравнений.....	32
<i>Метод простой итерации</i>	33
<i>Метод Ньютона (метод касательных)</i>	35
<i>Метод хорд</i>	36
<i>Комбинированный метод касательных и хорд</i>	37
<i>Задача 5</i>	38
4. Численное интегрирование.	44
<i>Понятие о квадратурной формуле</i>	44
<i>Простейшие квадратурные формулы</i>	45
<i>Формулы прямоугольников</i>	45
<i>Формулы трапеций</i>	47
<i>Формулы Симпсона</i>	48
<i>Задача 6</i>	50
5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	53
<i>Метод Эйлера</i>	54
<i>Методы Эйлера-Коши и Рунге-Кутты</i>	56
<i>Задача 7</i>	58

Задача 8	60
6. Решение дифференциальных уравнений в частных производных	67
Метод сеток для решения смешанной задачи для уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности).....	68
Задача 9	70
ЛИТЕРАТУРА.....	76
Основная литература	76
Дополнительная литература	76
Литература по применению Mathcad	77
Приложение 1. Требования к оформлению курсовой работы.....	78
Приложение 2. Встроенные функции Mathcad 14/15 для реализации численных методов	80
Вставка встроенных функций в документ Mathcad.....	80
Функции решения уравнений	82
Функции решения дифференциальных уравнений.....	83
Функции аппроксимации.....	86
Функции сглаживания и прогнозирования.....	88
Функции анализа данных	89

Введение

Современная вычислительная техника требует от инженеров знаний основ вычислительной математики и численных методов, а также применения этих знаний и навыков к решению различных задач народного хозяйства. Дисциплина «Численные методы» занимает большое место в учебных планах университетов, готовящих специалистов для работы с вычислительной техникой. Настоящее учебное пособие представляет собой руководство к выполнению лабораторно-практических занятий и курсовой работы по дисциплине «Численные методы».

Учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой для специалистов и бакалавров, обучающихся по специальности 231300 «Прикладная математика», но может быть использовано для подготовки специалистов и бакалавров других специальностей, содержащих в своих учебных планах изучение численных методов и вычислительной математики.

Учебное пособие состоит из 6 разделов и в достаточно полной мере иллюстрирует содержание курса «Численные методы». Здесь рассмотрены:

- интерполирование (формулы Ньютона и Лагранжа, схема Эйткена);
- эмпирические формулы (метод наименьших квадратов);
- решение нелинейных уравнений (методы итераций, хорд и касательных, комбинированный метод);
- численное интегрирование (малые и большие формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона);
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений (методы Эйлера-Коши и Рунге-Кутты);
- решение уравнений в частных производных методом сеток для уравнений параболического типа;

Учебное пособие разбито на разделы, которые начинаются с рассмотрения теоретического материала, где приводятся все соотношения и формулы, необходимые для вычислений, выражения для остаточных членов и

даются их оценки. Далее приводится набор индивидуальных заданий по каждому изучаемому разделу, рассчитанный на 30 вариантов. После вариантов заданий выполняется разбор типового примера с иллюстрацией его решения с применением ППП Mathcad. В приложениях приводятся требования к оформлению курсовой работы по дисциплине «Численные методы», а также справочные сведения по встроенным функциям ППП Mathcad, применяемым для реализации численных методов.

Особенностью учебного пособия является тесное переплетение вопросов численных методов и вычислительной математики и математического анализа. Все задания, включенные в учебное пособие, отработаны авторами в течение последних 15 лет.

В заключение учебного пособия приводится достаточно полная библиография, содержащая наименования основных учебников, учебных пособий и книг по численным методам и работе с ППП Mathcad.

1. Интерполирование

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определяемую таблицей:

x_i	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Значения аргумента x_i будем называть *узловыми*, а точки оси x , соответствующие этим значениям, – *узлами*.

Интерполированием функции $y=f(x)$ называется нахождение ее значений при любых значениях аргумента $x \in [x_0, x_n]$, не совпадающих с его узловыми значениями.

Экстраполированием функции $y=f(x)$ называется нахождение ее значений при значениях аргумента, не принадлежащих $[x_0, x_n]$.

Обе задачи в общем случае могут быть решены только приближенно: вместо данной функции берется функция определенного вида, называемая *интерполяционной* функцией, значения которой в узлах совпадают со значениями данной функции.

Рассмотрим *параболическое* интерполирование, когда интерполяционная функция представляет собой полином n -й степени, т.е.

$$P(x_i) = y_i \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Существует ряд интерполяционных полиномов (Лагранжа, Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя и др.), отличающихся друг от друга только видом, но тождественно равных друг другу. Однако при использовании этих полиномов могут получаться различающиеся между собой результаты из-за неточности вычислений, обусловленной их видом.

Рассмотрим два интерполяционных полинома: Лагранжа (при любых узлах) и Ньютона (при равноотстоящих узлах).

Интерполяционная формула Лагранжа

Интерполяционной формулой Лагранжа называется формула, представляющая многочлен

$$L(x) = \sum_{i=0}^n y_i P_i(x),$$

где $P_i(x)$ - многочлен степени n , значения которого равны единице в узле x_i и нулю в остальных узлах x_k ($k \neq i$) ($i, k=0, 1, \dots, n$). Он имеет вид

$$P_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Погрешность интерполяции полиномом Лагранжа оценивается по формуле:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|,$$

где

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

Схема Эйткена

Значения интерполяционного полинома Лагранжа можно определить численно, без нахождения самого многочлена.

Для нахождения алгоритма таких вычислений, рассмотрим выражение

$$L_{0,1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}.$$

Оно будет полиномом первой степени, обращающимся в y_0 и y_1 при $x = x_0$ и $x = x_1$.

Аналогично

$$L_{1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}$$

будет полиномом первой степени, обращающимся в y_1 и y_2 при $x = x_1$ и $x = x_2$.

Далее получим, что выражение

$$L_{0,1,2}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{0,1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}$$

будет полиномом второй степени, обращающимся в y_0 , y_1 и y_2 при $x = x_0$, $x = x_1$ и $x = x_2$.

Аналогично

$$L_{1,2,3}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{1,2}(x) & x_1 - x \\ L_{2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_1}$$

будет полиномом второй степени, обращающимся в y_1 , y_2 и y_3 при $x = x_1$, $x = x_2$ и $x = x_3$.

Продолжая процесс построения многочленов далее, найдем, что

$$L_{0,1,2,\dots,n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{0,1,2,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2,3,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}$$

будет полиномом n -й степени, обращающимся в y_0 , y_1 , ..., y_n при $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_n$.

Интерполяционная формула Ньютона

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на n равных частей точками x_i — узлами интерполяции, число которых равно $n+1$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b, \quad x_{i+1} - x_i = h = \text{const}.$$

Определим разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции, называемые конечными разностями:

конечные разности первого порядка Δy_i :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, \dots, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \dots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1};$$

конечные разности второго порядка $\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i)$:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = (y_3 - y_2) - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1,$$

.....,

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_{n-2} &= \Delta(\Delta y_{n-2}) = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = (y_n - y_{n-1}) - (y_{n-1} - y_{n-2}) = \\ &= y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2};\end{aligned}$$

конечные разности третьего порядка $\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i)$:

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_0 &= \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(\Delta y_1 - \Delta y_0) = (\Delta y_2 - \Delta y_1) - (\Delta y_1 - \Delta y_0) = \\ &= (y_3 - y_2 - y_2 + y_1) - (y_2 - y_1 - y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,\end{aligned}$$

.....,

$$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta(\Delta^2 y_0) = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3};$$

.....;

Конечные разности до k -го порядка $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^k y_0$ ($k \leq n$) при заданной последовательности значений функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_k$ вычисляются по формулам

$$\Delta^k y_0 = \Delta(\Delta^{k-1} y_0) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j y_{k-j}, \text{ где } C_k^j = \frac{k!}{(k-j)! j!}.$$

Вычисление конечных разностей представлено в следующей таблице:

x	Δx	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0		y_0					
	h		Δy_0				
x_1		y_1		$\Delta^2 y_0$			
	h		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		
x_2		y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$	
	h		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		$\Delta^5 y_0$
x_3		y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$	
	h		Δy_3		$\Delta^3 y_2$		$\Delta^5 y_1$
x_4		y_4		$\Delta^2 y_3$		$\Delta^4 y_2$	
...	...	...	...	...	...	...	...

Значения функции в узлах интерполяции можно выразить через значение функции y_0 и конечные разности:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0;$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0;$$

.....;

$$y_k = y_0 + \sum_{j=1}^k C_k^j \Delta^j y_0, \text{ или}$$

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \Delta^k y_0, \quad (1 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Будем искать полином $P_n(x)$, принимающий в узлах интерполяции x_k значения y_k ($0 \leq k \leq n$), в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \quad (2) \\ \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, - некоторые постоянные. Эти постоянные определим из условия совпадения интерполяционного полинома с заданной функцией в узлах аргумента. Полагая в (2) последовательно $x = x_0$, $x = x_1 = x_0 + h$, $x = x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x = x_n = x_0 + nh$ и приравнявая полученные результаты соответствующим значениям, определяемым из соотношения (1), найдем

$$P_n(x_0) = a_0 = y_0;$$

$$P_n(x_1) = y_1, \quad a_0 + a_1 h = y_0 + \Delta y_0, \quad a_1 = \frac{1}{h} \Delta y_0;$$

$$P_n(x_2) = y_2, \quad a_0 + a_1 2h + a_2 2h^2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0, \quad a_2 = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 y_0.$$

$$\text{Продолжая этот процесс, получим } a_k = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k y_0 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Подставляя найденные значения a_k в выражение (2), получим *интерполяционный полином Ньютона*:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\
 & + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\
 & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).
 \end{aligned} \quad (3)$$

Формулу (3) можно представить в иной форме, положив $\frac{x - x_0}{h} = t$.

Тогда получим окончательный вид *интерполяционной формулы Ньютона*:

$$\begin{aligned}
 P_n(x_0 + ht) = & y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \\
 & \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Погрешность интерполяции оценивается по формуле:

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!} |t(t-1)(t-2)\dots(t-n)|. \quad (5)$$

Формула (4) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Данная формула применяется для интерполирования в начале отрезка, когда t мало по абсолютной величине.

В случае, когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, используется вторая интерполяционная формула Ньютона, которая получается, если отыскивать интерполяционный полином в виде:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\
 & \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1).
 \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты a_k в этом случае вычисляются следующим образом:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!h^k}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5) и перейдя к переменной $t = \frac{x - x_n}{h}$, получим

окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x_0 + ht) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \dots$$

$$\dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (7)$$

Погрешность интерполяции оценивается формулой:

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!} |t(t+1)(t+2) \cdot \dots \cdot (t+n)|.$$

Для решения задач интерполирования в среде MathCAD существует встроенная функция *linterp* (v_x, v_y, x). Эта функция использует векторы данных v_x и v_y для того, чтобы возвратить линейно интерполируемое значение y , соответствующее третьему аргументу x . Аргументы v_x и v_y должны быть векторами одинаковой длины, при этом вектор v_x должен содержать вещественные значения, расположенные в порядке возрастания.

Задача 1.

Задание. Найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа, если функция задана в неравноотстоящих узлах таблицы. Построить график полученной функции и точечный график табличных значений. Для проверки результата решить задачу с помощью встроенной функции *linterp*.

Таблица 1

x	y	вариант	x
0,43	1,63597	1	0,702
0,48	1,73234	7	0,512
0,55	1,87686	13	0,645
0,62	2,03345	19	0,736
0,70	2,22846	25	0,608
0,75	2,35973		

Таблица 2

x	y	вариант	x
0,02	1,02316	2	0,102
0,08	1,09590	8	0,114
0,12	1,14725	14	0,125
0,17	1,21483	20	0,203
0,23	1,30120	26	0,154
0,30	1,40976		

Таблица 3

x	y	вариант	x
0,35	2,73951	3	0,526
0,41	2,30080	9	0,453
0,47	1,96864	15	0,482
0,51	1,78776	21	0,552
0,56	1,59502	27	0,436
0,64	1,34310		

Таблица 4

x	y	вариант	x
0,41	2,57418	4	0,616
0,46	2,32513	10	0,478
0,52	2,09336	16	0,665
0,60	1,86203	22	0,537
0,65	1,74926	28	0,673
0,72	1,62098		

Таблица 5

x	y	вариант	x
0,68	0,80866	5	0,896
0,73	0,89462	11	0,812
0,80	1,02964	17	0,774
0,88	1,20966	23	0,955
0,93	1,34087	29	0,715
0,99	1,52368		

Таблица 6

x	y	вариант	x
0,11	9,05421	6	0,314
0,15	6,61659	12	0,235
0,21	4,69170	18	0,332
0,29	3,35106	24	0,275
0,35	2,73951	30	0,186
0,40	2,36512		

Пример. Функция задана в виде таблицы

x	1	2	5	7	10
y	1	4	25	49	95

Найти приближенное значение функции при $x = 4$ и $x = 6$ с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Построить график полученной функции и точечный график табличных значений. помощью интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить график полученной функции и точечный график табличных значений. Для проверки результата решить задачу с помощью встроенной функции *linterp*.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

ЗАДАЧА 1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПО ЛАГРАНЖУ

Итак, заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i :

Оригиналы $\equiv 0$

Заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

В узлах x_i заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 25 \\ 49 \\ 95 \end{pmatrix}$$

В узлах x_i заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

$n := \text{length}(X) - 1$ $n = 4$

Итак, заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

В узлах x_i заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

$$L(x) := \sum_{i=0}^n \left[Y_i \cdot \prod_{j=0, j \neq i}^n \left[\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] \right]$$

Итак, заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

В узлах x_i заданы следующие значения функции $y = f(x)$ в узлах x_i .

$$L(1) = 1 \quad L(2) = 4 \quad L(5) = 25 \quad L(7) = 49 \quad L(10) = 95$$

Интерполируем значения функции в искомых точках по формуле Лагранжа

$$L(4) = 15.917$$

$$L(6) = 36.093$$

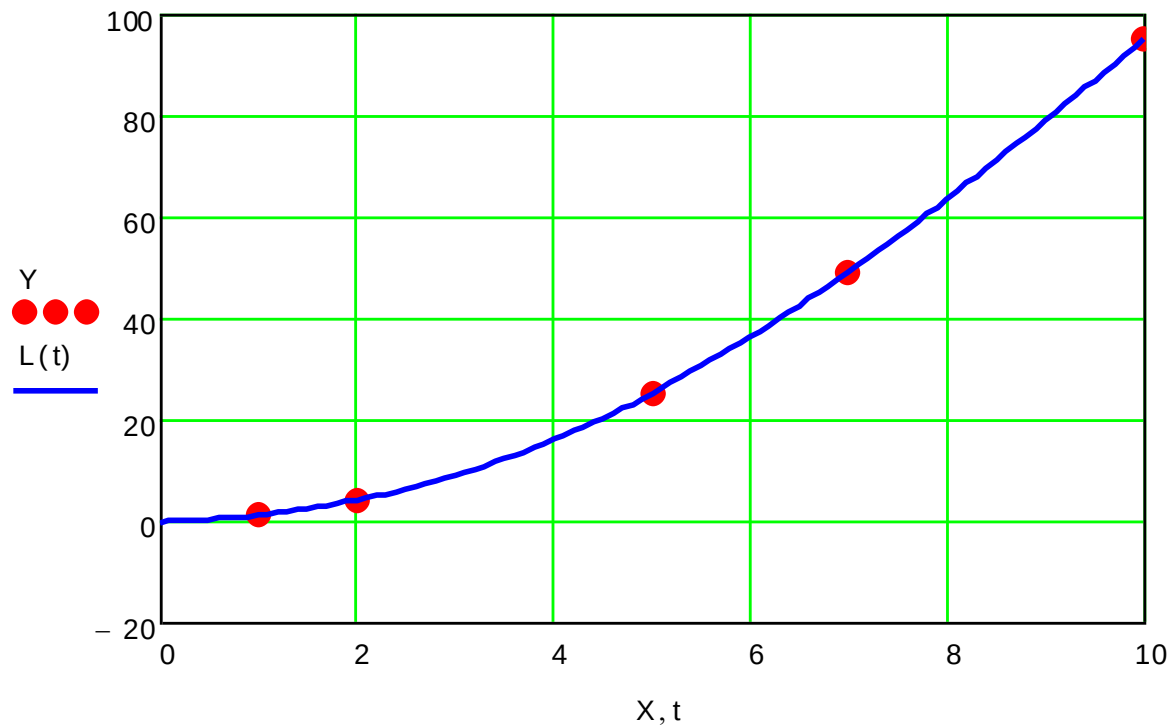
Интерполируем значения функции в искомых точках
 функцией линейной интерполяции linterp, встроенной в Mathcad

$$\text{linterp}(X, Y, 4) = 18$$

$$\text{linterp}(X, Y, 6) = 37$$

Нужно найти значения функции в точках $t := 0, 0.1 \dots 10$

$t := 0, 0.1 \dots 10$



Задача 2

Задание. Используя схему Эйткена, вычислить приближенное значение функции, заданной таблично, при данном значении аргумента. Выбрать из таблицы несколько значений так, чтобы данное значение аргумента было расположено между двумя средними значениями, и вычислить значение функции от данного значения аргумента по схеме, описанной выше.

Таблица 7

х	у	вариант	х
0,2050	0,207921	1	0,2054
0,2052	0,208130	7	0,2063
0,2060	0,208964	13	0,2072
0,2065	0,209486	19	0,2079
0,2069	0,209904	25	0,2088
0,2075	0,210530		
0,2085	0,211575		
0,2090	0,212097		
0,2096	0,212724		
0,2100	0,213142		

Таблица 8

х	у	вариант	х
0,8902	1,23510	2	0,8942
0,8909	1,23687	8	0,8973
0,8919	1,23941	14	0,8958
0,8940	1,24475	20	0,8948
0,8944	1,24577	26	0,8934
0,8955	1,24858		
0,8965	1,25114		
0,8975	1,25371		
0,9010	1,26275		
0,9026	1,26691		

Таблица 9

х	у	вариант	х
0,6100	1,83781	3	0,6111
0,6104	1,83686	9	0,6124
0,6118	1,83354	15	0,6142
0,6139	1,82860	21	0,6163
0,6145	1,82720	27	0,6192
0,6158	1,82416		
0,6167	1,82207		
0,6185	1,81791		
0,6200	1,81446		
0,6225	1,80876		

Таблица 10

х	у	вариант	х
0,5400	1,66825	4	0,5415
0,5405	1,66636	10	0,5424
0,5410	1,66448	16	0,5436
0,5420	1,66071	22	0,5452
0,5429	1,65734	28	0,5461
0,5440	1,65322		
0,5449	1,64987		
0,5455	1,64764		
0,5465	1,64393		
0,5473	1,64097		

Таблица 11

х	у	вариант	х
0,62	0,537944	5	0,846
0,67	0,511709	11	0,864
0,74	0,477114	17	0,683
0,80	0,449329	23	0,785
0,87	0,418952	29	0,866
0,96	0,382893		
0,99	0,371577		

Таблица 12

х	у	вариант	х
1,03	2,80107	6	1,277
1,08	2,94468	12	1,118
1,16	3,18993	18	1,204
1,23	3,42123	24	1,255
1,26	3,52542	30	1,282
1,33	3,78104		
1,39	4,01485		

Пример. Функция задана в виде таблицы

x	1	2	5	7	10
y	1	4	25	49	95

Найти приближенное значение функции при $x = 4$ и $x = 6$ с помощью схемы Эйткена. Построить график полученной функции и точечный график табличных значений.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

ÇÀÄÄ×À 2. ЁÒÀÐÎËËÖËË Î ÝÉÒÊÁÍÓ

Ìà÷àèüíúé èíààèñ àññèàñ à àíèóíàíòà çààààì ðààíüì íóèð,

ORIGIN := 0

Çààààì èññíàíüà ààíüà.

Èíàíà à àèòíð çàèèñüàààì ïñíèñíüè áóéààèè.

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 25 \\ 49 \\ 95 \end{pmatrix}$$

ïðððàíèðóàì ñóàñ Ýéòêáíà èàé ðàéóðñèáíóð ïðððàííóð
óóíéòèð Mathcad, èñíèüçóðóòóð ààíüà, ïðàààéàíüà àüøà

$$L(x, a, b) := \left| \begin{array}{l} \frac{\left| \begin{pmatrix} Y_a & X_a - x \\ Y_b & X_b - x \end{pmatrix} \right|}{X_b - X_a} \text{ if } b - a = 1 \\ \frac{\left| \begin{pmatrix} L(x, a, b - 1) & X_a - x \\ L(x, a + 1, b) & X_b - x \end{pmatrix} \right|}{X_b - X_a} \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

ἰῶᾱῶᾱῖῇῶᾱῖ ῶῖῇῶῇῇ ῇᾱῖῇᾱ ῇῶᾱῖῇ ῖῇῶᾱῖᾱ

$$E(x) := L(x, 0, \text{last}(X))$$

ἰῶᾱᾱῇᾱῖῇ ἰῶᾱᾱῇῇῇῇῇῇῇ

ῇῖῇᾱῇῇῇῇῇῇῇῇ ῶῖῇῇῇῇ ᾱ ῇῇᾱῇῇ

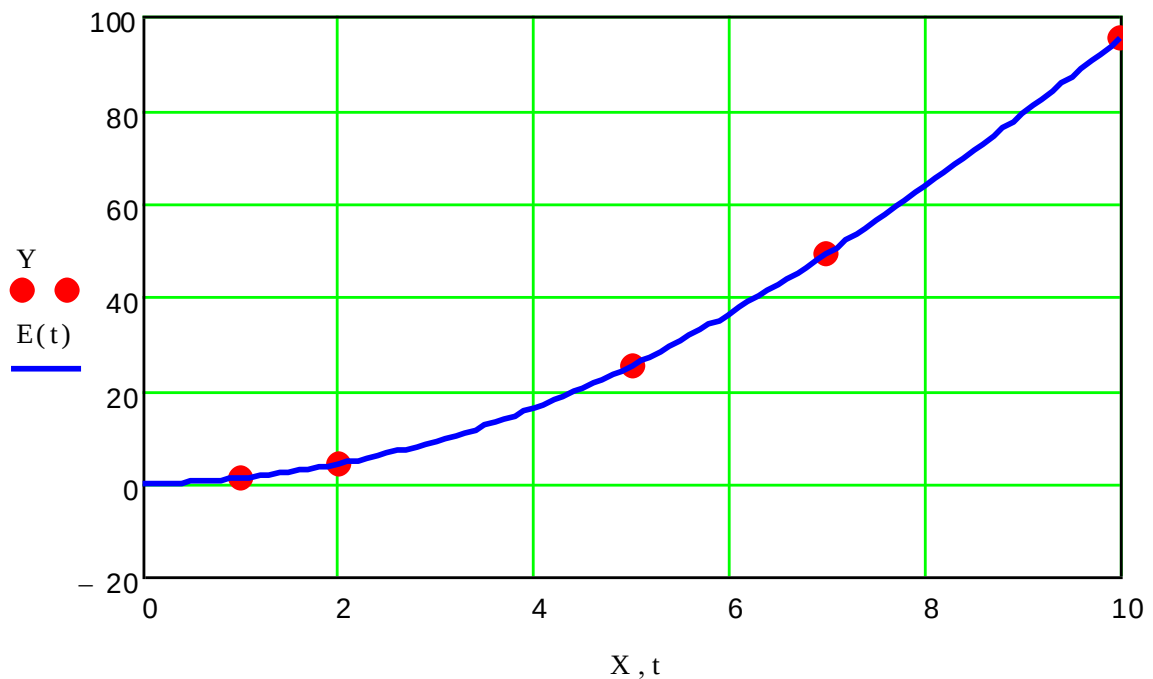
$$E(1) = 1 \quad E(2) = 4 \quad E(5) = 25 \quad E(7) = 49 \quad E(10) = 95$$

Интерполируем значения функции в искомым точках

$$E(4) = 15.917 \quad E(6) = 36.093$$

ῖῇῇῇῇῇ ᾱῇᾱῇῇῇ ῇᾱῇῇῇῇῇ ῇῇᾱῇῇῇῇῇῇῇῇ ῇᾱῇῇῇῇ ῶῖῇῇῇῇῇ

$$t := 0, 0.1 \dots 10$$



Задача 3

Задание: Используя интерполяционную формулу Ньютона, вычислить значения функции, заданной таблично, при данных значениях аргумента.

Таблица 13

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1,415	0,888551	1	1,4161	1,4625	1,4135	1,470
1,420	0,889599	11	1,4179	1,4633	1,4124	1,4655
1,425	0,890637	21	1,4263	1,4575	1,410	1,4662
1,430	0,891667					
1,435	0,892687					

Таблица 14

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,101	1,26183	2	0,1026	0,1440	0,099	0,161
0,106	1,27644	12	0,1035	0,1492	0,096	0,153
0,111	1,29122	22	0,1074	0,1485	0,1006	0,156
0,116	1,30617					
0,121	1,32130					

Таблица 15

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,15	0,860708	3	0,1511	0,7250	0,1430	0,80
0,20	0,818731	13	0,1535	0,7333	0,100	0,7540
0,25	0,778801	23	0,1525	0,6730	0,1455	0,85
0,30	0,740818					
0,35	0,704688					

Таблица 16

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,180	5,61543	4	0,1917	0,2275	0,175	0,2375
0,185	5,46693	14	0,1827	0,2292	0,1776	0,240
0,190	5,32634	24	0,1873	0,2326	0,1783	0,245
0,195	5,19304					
0,200	5,06649					

Таблица 17

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
3,50	33,1154	5	3,522	4,176	3,475	4,25
3,55	34,8133	15	3,543	4,184	3,488	4,30
3,60	36,5982	25	3,575	4,142	3,45	4,204
3,65	38,4747					
3,70	40,4473					

Таблица 18

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,115	8,65729	6	0,1217	0,1736	0,1141	0,185
0,120	8,29329	16	0,1168	0,1745	0,110	0,1825
0,125	7,95829	26	0,1175	0,1773	0,1134	0,190
0,130	7,64893					
0,135	7,36235					

Таблица 19

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
1,340	4,25562	7	1,3617	1,3921	1,3359	1,400
1,345	4,35325	17	1,3463	1,3868	1,335	1,3990
1,350	4,45522	27	1,3432	1,3936	1,3365	1,3975
1,355	4,56184					
1,360	4,67344					

Таблица 20

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,01	0,991824	8	0,027	0,525	0,008	0,61
0,06	0,951935	18	0,1243	0,492	0,0094	0,66
0,11	0,913650	28	0,083	0,5454	0,0075	0,573
0,16	0,876905					
0,21	0,841638					
0,56	0,631442					

Таблица 21

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,15	4,4517	9	0,1539	0,2569	0,14	0,2665
0,16	4,9530	19	0,1732	0,2444	0,1415	0,27
0,17	5,4739	29	0,1648	0,2550	0,1387	0,28
0,18	6,0496					
0,19	6,6859					

Таблица 22

x	y	№ варианта	Значения аргумента			
			x_1	x_2	x_3	x_4
0,45	20,1946	10	0,455	0,5575	0,44	0,5674
0,46	19,6133	20	0,4732	0,5568	0,445	0,57
0,47	18,9425	30	0,4675	0,5511	0,4423	0,58
0,48	18,1746					
0,49	17,3010					

Пример. Функция задана в виде таблицы

x	1	2	5	7	10
y	1	4	25	49	95

Найти приближенное значение функции при $x = 4$ и $x = 6$ с помощью интерполяционной формулы Ньютона. Построить график полученной функции и точечный график табличных значений.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

СЛАБАХА 3. ЕОАДИЕЗОЕЗ И ИУРОИО

ла-аеиуе елааеи лаһеаа а аіеіаіаа чааааі дааіуі іоер

ORIGIN := 0

Παράδειγμα 1: Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1: Παράδειγμα 1

$$P(1) = 1 \quad P(3) = 4 \quad P(5) = 25 \quad P(7) = 49 \quad P(9) = 95$$

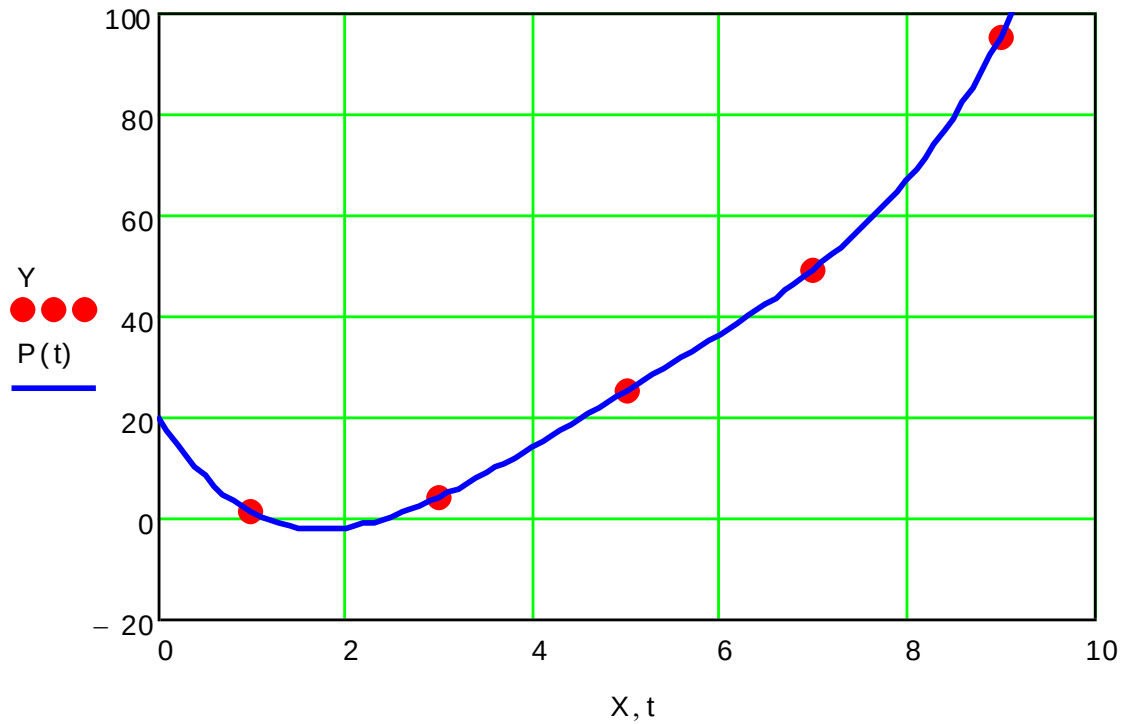
Интерполируем значения функции в искомым точках

$$P(4) = 13.984$$

$$P(6) = 36.234$$

Παράδειγμα 1: Παράδειγμα 1

$t := 0, 0.1 \dots 10$



2. Эмпирические формулы

Пусть в результате некоторого эксперимента получена таблица значений переменных x и y :

Таблица 23

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Требуется найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически. График искомой функции должен изменяться плавно и не слишком отклоняться от экспериментальных точек. Поиск такой функциональной зависимости называется «сглаживанием» экспериментальных данных, а сама зависимость — *эмпирической формулой*.

При построении эмпирической формулы выбирается вид функции $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ (линейные, степенные, дробно-линейные, показательные, логарифмические и др.), а также метод, определяющий критерий наименьшего уклонения эмпирической функции от экспериментальных данных и позволяющий определять неизвестные числовые параметры $a_1, a_2, \dots, a_m$ (метод средних, метод наименьших квадратов).

Метод наименьших квадратов

Пусть приближающая функция

$$y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_m) \quad (8)$$

в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет значения:

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n.$$

Мы должны найти такие значения параметров $a_1, a_2, \dots, a_m$, при которых совокупность чисел $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ была бы ближе всего к совокупности чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$.

За меру близости примем число

$$\sqrt{(y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2},$$

равное расстоянию между точками $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\bar{M}(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$, которое называется *квадратичным уклонением* совокупности чисел $y_1, y_2, \dots, y_n$ от совокупности чисел $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$. Если квадратичное уклонение имеет наименьшее значение, то и сумма квадратов уклонений

$$S = (y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2 \quad (9)$$

будет наименьшей.

Суть метода состоит в следующем: для функции $y = f(x)$, заданной таблицей 23, найти функцию $y = f(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ определенного вида так, чтобы сумма квадратов (9) была наименьшей. Это означает нахождение параметров $a_1, a_2, \dots, a_m$, при которых функция

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (f(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i)^2$$

достигает минимума.

Пользуясь необходимыми условиями экстремума функции нескольких переменных, получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \quad (10)$$

Найдем эмпирическую формулу в виде квадратного трехчлена:

$$f(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c.$$

В этом случае сумма квадратов уклонений примет вид:

$$S(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Составляем систему вида (10):

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a, b, c)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial S(a, b, c)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial S(a, b, c)}{\partial c} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0. \end{cases}$$

Окончательный вид этой системы:

$$\begin{cases} M_{x^4}a + M_{x^3}b + M_{x^2}c = M_{x^2y}, \\ M_{x^3}a + M_{x^2}b + M_x c = M_{xy}, \\ M_{x^2}a + M_x b + c = M_y, \end{cases}$$

$$\text{где } M_{x^4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4, \quad M_{x^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3, \quad M_{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$M_{x^2y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \quad M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad M_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Задача 4

Задание: Для табличных данных подобрать эмпирическую формулу в виде многочлена второй степени $y = ax^2 + bx + c$, используя метод

наименьших квадратов. Построить графики получившейся зависимости и табличных значений аргументов и функции.

Таблица 24

1	x	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	y	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
2	x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
	y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87
3	x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,60
	y	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04
4	x	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
	y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
5	x	5,84	3,82	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
	y	79,31	57,43	60,66	92,55	90,12	71,30	70,50	91,25
6	x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48
7	x	5,46	2,73	6,49	4,26	2,39	6,46	0,86	2,05
	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
8	x	1,28	1,76	2,24	2,72	3,20	3,68	4,16	4,64
	y	2,10	2,62	3,21	3,96	4,98	6,06	7,47	9,25
9	x	-4,84	-4,30	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,60	-1,06
	y	-0,09	-0,11	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81
10	x	3,54	4,29	4,78	3,99	1,13	6,29	1,89	3,27
	y	22,81	28,42	24,95	26,96	8,78	33,55	15,77	22,89
11	x	4,08	4,42	2,52	-0,08	2,14	3,36	7,35	5,00
	y	18,31	21,85	16,93	-8,23	10,90	17,18	36,45	24,11
12	x	1,16	1,88	2,60	-3,32	4,04	4,76	5,48	6,20
	y	0,18	0,26	0,32	0,36	0,40	0,43	0,95	0,85
13	x	1,00	1,71	2,42	-3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
	y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,50

14	x	-0,64	-0,36	-0,08	0,20	0,48	0,76	1,04	1,32
	y	29,51	18,6	12,05	7,70	4,92	3,14	2,01	1,28
15	x	-2,45	-1,94	-1,43	-0,92	-0,41	0,10	0,61	1,12
	y	0,87	1,19	1,68	2,23	3,04	4,15	5,66	7,72
16	x	1,54	1,91	2,28	-2,65	3,02	3,39	3,76	4,13
	y	-2,52	-3,08	-3,54	-3,93	-4,27	-4,57	-4,84	-5,09
17	x	1,20	2,00	2,80	-3,60	4,40	5,20	6,00	6,80
	y	-10,85	-6,15	-4,14	-3,02	-2,30	-1,81	-1,45	-1,17
18	x	-1,04	-0,67	-0,30	0,07	0,44	0,81	1,18	1,55
	y	10,80	8,08	5,97	4,44	3,31	2,46	1,83	1,36
19	x	0,41	0,97	1,53	-2,09	2,65	3,21	3,77	4,33
	y	0,45	1,17	1,56	1,82	2,02	2,18	2,31	2,44
20	x	3,80	0,25	0,48	5,78	4,91	1,56	0,91	5,73
	y	-19,23	-21,41	-9,90	-19,56	-0,30	-12,04	1,14	11,26
21	x	1,65	1,39	1,19	1,02	0,82	0,75	0,66	0,89
	y	1,034	1,232	1,432	1,752	2,056	2,37	2,76	3,198
22	x	0,22	-3,05	-1,76	-1,25	-0,45	-0,80	-0,26	-3,07
	y	58,46	36,05	31,17	16,17	11,16	69,23	58,08	34,13
23	x	7,03	5,98	7,10	6,92	6,69	3,66	7,60	3,61
	y	18,93	-22,13	-10,07	20,5	7,09	4,04	-20,78	-12,98
24	x	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96	3,40	4,55
	y	44,56	82,52	99,17	70,2	63,23	66,48	48,35	40,24
25	x	2,95	2,60	2,69	3,01	2,44	2,51	3,37	2,98
	y	113,8	119,66	106,28	120	107,43	114,8	115,53	117,4
26	x	6,06	7,20	5,62	7,01	5,73	6,98	,6,06	6,32
	y	113,8	119,66	106,28	120	107,43	114,8	115,53	117,4
27	x	4,23	1,40	4,07	2,93	3,44	1,09	1,82	2,43
	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
28	x	4,07	2,93	3,44	1,09	1,82	2,43	3,85	0,97

	y	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74	56,81	45,82
29	x	8,90	9,22	8,74	8,98	8,77	9,31	8,81	9,14
	y	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09	70,44	51,67
30	x	2,51	3,74	8,70	5,36	1,89	3,01	3,56	2,64
	y	55,65	67,68	105,2	85,02	52,76	56,86	72,19	61,09

Пример. Задана табличная зависимость величины y от x в виде двух векторов значений X и Y . Аппроксимировать эту формулой $y = ax^2 + bx + c$. Вычислить коэффициенты a , b , c используя метод наименьших квадратов. Построить графики получившейся зависимости и табличных значений аргументов и функции.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

Задача 4. Даны значения x и y в виде векторов:

Оригиналы: $x := 0$

Даны значения x и y в виде векторов:

$$X := \begin{pmatrix} 13.8 \\ 14.0 \\ 14.4 \\ 14.54 \\ 15.0 \\ 15.6 \\ 15.8 \\ 17.0 \\ 18.1 \\ 19.0 \end{pmatrix}$$

$$Y := \begin{pmatrix} 74.0 \\ 91.0 \\ 85.0 \\ 87.0 \\ 94.0 \\ 92.0 \\ 96.0 \\ 97.0 \\ 98.0 \\ 99.0 \end{pmatrix}$$

Àǻĩēñēìèďĩāàòü ýòó çàâèñēĩñòü ôóíéöèǻé

$$y = a + b \cdot x^2 + c \cdot x^3$$

lǎo lǎo lì là èi lǎo ü ø ò ê â ä ö à ò iā

Ôñìèďóàì ôóíêöèp S

$$\text{sum}(a, b, c) := \sum_{i=0}^{\text{last}(X)} \left[Y_i - \left[a + b \cdot (X_i)^2 + c \cdot (X_i)^3 \right] \right]^2$$

lèêlèçèđóàì S ôóêëèăé Mathcad Minimize

(â Mathcad 13 ýòà ôóíêöèÿ ãæǎò íǎ đàáiòàòü)

$$a := 1$$
$$b := 1$$
$$c := 1$$

Íà÷àëüíûå ïðèáëèæåíèÿ

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

b := Minimize (s, a, b, c) $\rightarrow$ s, a, b, c

$$a = 0.251$$
$$b = 0.865$$
$$c = -0.031$$

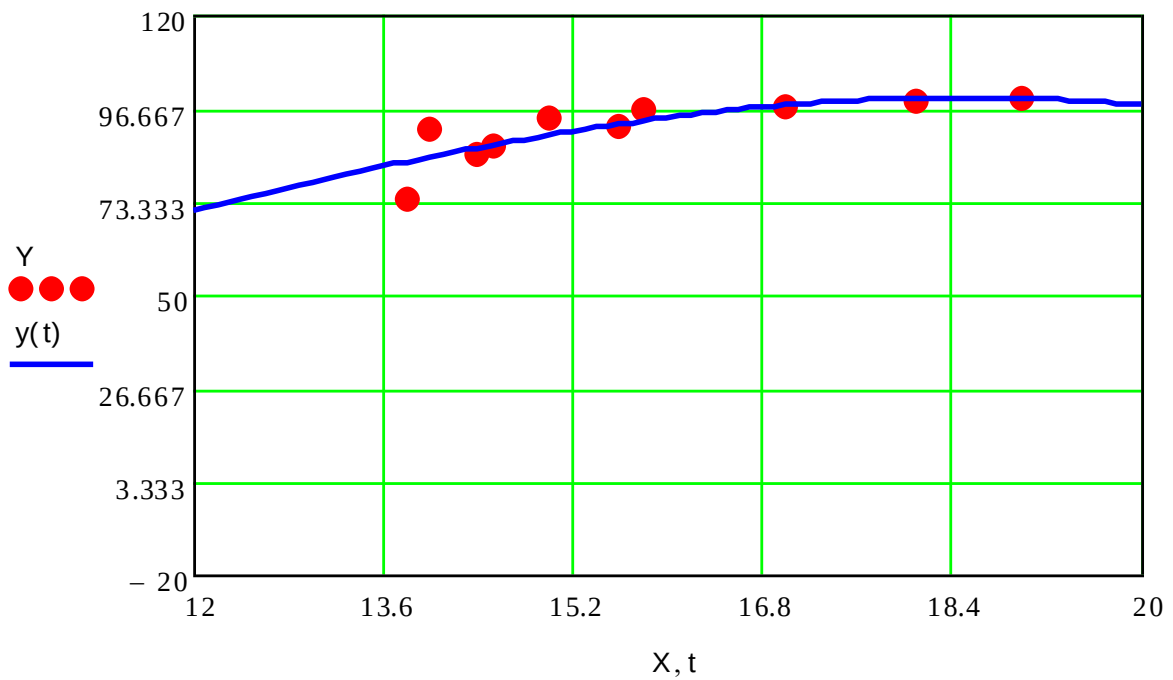
Đăçóëüòàò ìèíèìèçàöèè

Ôñìěđóàì àìĩđĩñěìěđópùóp ôóíēöèp.

$$y(x) := a + b \cdot x^2 + c \cdot x^3$$

Nòôîèì ãðàòêèè òàáèè÷îè è àììððîîñîèèððòùàé çàâèñîîñòàé

```
t := 12, 12.1 .. 20
```



3. Решение нелинейных уравнений

Пусть

$$f(x) = 0 \quad (11)$$

некоторое уравнение. Число ξ называется *корнем (решением)* данного уравнения, если оно, будучи подставлено в уравнение, обращает его в тождество, т.е. $f(\xi) = 0$. Число ξ называют также нулем функции $y = f(x)$.

Нахождение действительных корней с определенной точностью можно разбить на два этапа:

-отделение корней, т. е. установление промежутков, в каждом из которых содержится один корень уравнения;

-вычисление корня, принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого промежутка найдется, по крайней мере, один нуль функции.

В большинстве случаев отделение корней уравнения $f(x) = 0$ можно провести графически следующими способами:

- построить график функции $y = f(x)$ на некотором промежутке изменения x . Абсцисса ξ точки пересечения графика с осью Ox – нуль функции, т.е. $f(\xi) = 0$;

- уравнение $f(x) = 0$ заменить равносильным $\varphi(x) = \phi(x)$. Построить графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \phi(x)$. Искомые корни являются абсциссами точек пересечения этих графиков.

Метод простой итерации

Пусть требуется решить уравнение, представленное в виде

$$x = g(x), \quad (12)$$

где правая часть уравнения – непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

Суть метода итераций состоит в следующем. Начиная с произвольной точки x_0 , принадлежащей отрезку $[a, b]$, и подставляя $x = x_0$ в правую часть уравнения (12) получаем

$$x_1 = g(x_0) - \text{первое приближение.}$$

Подставляя затем $x = x_1$ в правую часть уравнения (12) находим

$$x_2 = g(x_1) - \text{второе приближение,}$$

.....

$$x_{k+1} = g(x_k) - (k+1)\text{-е приближение,}$$

.....

Последовательность

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots \quad (13)$$

называется последовательностью итераций для уравнения (12) с начальной точкой x_0 . Если все точки (13) принадлежат отрезку $[a, b]$ и существует предел

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \text{ то перейдя к пределу в равенстве}$$

$$x_{k+1} = g(x_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{получим } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k), \text{ т.е. } \xi = g(\xi).$$

Таким образом, если существует предел последовательности итераций (13), то он является корнем уравнения (12).

Достаточные условия сходимости последовательности итераций.

Пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную и выполнены два условия:

$$|g'(x)| \leq q < 1 \text{ при } x \in [a, b].$$

Значения функции $y = g(x)$ принадлежат отрезку $[a, b]$ для любого $x \in [a, b]$.

Тогда при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a, b]$ процесс итераций сходится к единственному корню ξ уравнения (12) на отрезке $[a, b]$.

Оценка погрешности k -го приближения x_k к корню ξ :

$$|\xi - x_k| \leq \frac{q}{1 - q} |x_k - x_{k-1}|, \text{ где } q = \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)|.$$

Рассмотрим один из способов преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = g(x)$, допускающему применение метода итераций, который сходится к решению ξ данного уравнения.

Уравнение $x = g(x)$, где $g(x) = x + \lambda f(x)$, при $\lambda \neq 0$ равносильно уравнению (11). Предположим, что производная $f'(x) > 0$ и непрерывна на

$[a, b]$. Пусть $M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$, $m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$; положим $\lambda = -\frac{1}{M}$,

$q = 1 - \frac{m}{M}$ и рассмотрим функцию

$$g(x) = x - \frac{1}{M} f(x).$$

Для этой функции выполняются достаточные условия сходимости метода итераций. В частности, первое из них следует из неравенств

$$0 < m \leq f'(x) \leq M,$$

$$0 \leq g'(x) = 1 - \frac{1}{M} f'(x) \leq 1 - \frac{m}{M} = q < 1, \forall x \in [a, b].$$

Замечание 1. Если окажется, что производная $f'(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то уравнение (11) можно заменить на равносильное уравнение $-f(x) = 0$ и использовать указанное преобразование.

Замечание 2. Если вычисление точного значения числа M затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако при большем M_1

число $q = 1 - \frac{m}{M}$ ближе к единице и процесс итераций сходится медленнее.

Замечание 3. При нахождении корня уравнения (12) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ или при оценке погрешности k -го приближения можно, не вычисляя точного значения числа $q = \max_{a \leq x \leq b} |g'(x)|$, ограничиться следующим:

$$|\xi - x_k| \leq \begin{cases} |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon & \text{при } 0 < q \leq \frac{1}{2}; \\ 10 \cdot |x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon & \text{при } \frac{1}{2} < q < 1. \end{cases}$$

Метод Ньютона (метод касательных)

Численный метод решения уравнения (12) называется методом Ньютона (методом касательных), если приведенное к методу итераций уравнение представляется в виде

$$x = \phi(x), \text{ где } \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (14)$$

Последовательность итераций, сходящаяся к корню уравнения, определяется формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \geq 0.$$

Достаточные условия сходимости последовательности итераций.

Процесс итераций (15) сходится к единственному корню ξ уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

- на концах отрезка функция имеет разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- первая $f'(x)$ и вторая $f''(x)$ производные функции существуют и знакопостоянны на отрезке $[a, b]$;
- за начальное приближение x_0 следует выбирать тот конец отрезка $[a, b]$, в котором знаки функции и второй производной совпадают, т.е. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Оценка погрешности k -го приближения x_k к корню ξ :

$$|\xi - x_k| \leq |x_k - x_{k-1}|. \quad (15)$$

При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления надо вести до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Метод хорд

Метод хорд (метод секущих) является одной из модификаций метода Ньютона. Его можно рассматривать как метод простой итерации с итерационной функцией

$$\phi(x) = x - \frac{(c - x)f(x)}{f(c) - f(x)}, \quad (16)$$

где c - фиксированная точка, расположенная в окрестности корня ξ .

Последовательность итераций, сходящаяся к корню уравнения, определяется формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(c - x_k)f(x_k)}{f(c) - f(x_k)}, \quad k \geq 0. \quad (17)$$

Достаточные условия сходимости последовательности итераций.

Процесс итераций (17) сходится к единственному корню ξ уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$, если выполнены следующие условия:

- на концах отрезка функция имеет разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, что гарантирует существование корня уравнения на отрезке $[a, b]$;

- первая $f'(x)$ и вторая $f''(x)$ производные функции существуют и знакопостоянны на отрезке $[a, b]$;

- неподвижной точкой c является тот конец отрезка $[a, b]$, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной, т.е. $f(c) \cdot f''(c) > 0$. Если $c = b$, т.е. неподвижен конец b , то за начальное приближение x_0 следует выбирать конец отрезка a . Если же $c = a$, то начальным приближением x_0 следует считать конец b .

Оценка погрешности определяется формулой (15) при условии

$$M \leq 2m,$$

где $m = \min_{[a,b]} |f'(x)|$, $M = \max_{[a,b]} |f'(x)|$.

Комбинированный метод касательных и хорд

Методы касательных и хорд дают приближение корня с разных сторон. Поэтому их часто применяют в сочетании друг с другом. В результате уточнение корня происходит быстрее.

Метод хорд дает приближения с недостатком, а метод касательных – с избытком. Истинное значение корня ξ заключено между приближенными значениями корней, полученных методом касательных и хорд:

$$a < x_k < \xi < \bar{x}_k < b.$$

Если $f(x) \cdot f''(x) > 0$, то за начальное приближение для метода хорд надо взять конец a отрезка $[a, b]$, а для метода касательных – конец b . Тогда:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= x_k - \frac{(\bar{x}_k - x_k) f(x_k)}{f(\bar{x}_k) - f(x_k)}, \\
 \bar{x}_{k+1} &= \bar{x}_k - \frac{f(\bar{x}_k)}{f'(\bar{x}_k)}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Если $f(x) \cdot f''(x) < 0$, то за начальное приближение для метода хорд надо взять конец b отрезка, а для метода касательных – конец a . Тогда:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 \bar{x}_{k+1} &= \bar{x}_k - \frac{(\bar{x}_k - x_k) f(\bar{x}_k)}{f(\bar{x}_k) - f(x_k)}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Погрешность вычислений определяется формулой $|\bar{x}_k - x_k| < \varepsilon$.

Приближенное значение корня:

$$\xi = \frac{x_k + \bar{x}_k}{2},$$

где x_k и $\bar{x}_k$ - приближенные значения корня с недостатком и избытком.

Задача 5

Задание: отделить корни уравнения графически и уточнить один из них с точностью до 0,001:

- 1) методом итераций;
- 2) методом хорд;
- 3) методом касательных;
- 4) комбинированным методом хорд и касательных.

В каждом случае проверить правильность решения с помощью встроенной в MathCAD функции root: a - корень уравнения $f(x) = 0$, т.е. $a := \text{root}(f(x), x)$.

Таблица 25

вар	1	2	3	4
1	$\ln x + (x+1)^3 = 0$	$x - \sin x = 0.25$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$
2	$x \cdot 2^x = 1$	$tg(0.58x + 0.1) = x^2$	$x^3 - 6x - 8 = 0$	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$
3	$\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$	$\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$
4	$x - \cos x = 0$	$tg(0.4x + 0.4) = x^2$	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$	$x^3 - 12x + 6 = 0$
5	$3x + \cos x + 1 = 0$	$\lg x - \frac{7}{2x+6} = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$
6	$x + \ln x = 0,5$	$tg(0.5x + 0.2) = x^2$	$x^2 + x - 5 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$
7	$2 - x = \ln x$	$3x - \cos x - 1 = 0$	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$
8	$(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$	$x + \lg x = 0.5$	$x^3 + 3x + 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 2,5 = 0$
9	$(2-x)e^x = 0$	$tg(0.5x + 0.1) = x^2$	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$
10	$2,2x - 2^x = 0$	$x^2 + 4 \sin x = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 3,5 = 0$
11	$x^2 + 4 \sin x = 0$	$ctg 1.05x - x^2 = 0$	$x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$
12	$2x - \lg x = 7$	$tg(0.4x + 0.3) = x^2$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$
13	$5x - 8 \ln x = 8$	$x \lg x - 1.2 = 0$	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$
14	$3x - e^x = 0$	$1.8x^2 - \sin 10x = 0$	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$	$x^3 - 12x + 10 = 0$
15	$x(x+1)^2 = 1$	$ctgx - \frac{x}{4} = 0$	$x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
16	$x = (x+1)^3$	$tg(0.3x + 0.4) = x^2$	$x^3 + 4x - 6 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$
17	$x^2 = \sin x$	$x^2 - 20 \sin x = 0$	$x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$	$x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$
18	$x^3 = \sin x$	$ctgx - \frac{x}{3} = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$
19	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$	$tg(0.47x + 0.2) = x^2$	$x^3 - 0.2x^2 + 0.3x + 1.2 = 0$	$x^3 - 12x - 5 = 0$
20	$x^2 = \ln(x+1)$	$x^2 + 4 \sin x = 0$	$x^3 - 2x + 4 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$
21	$2x + \lg x = -0,5$	$ctgx - \frac{x}{2} = 0$	$x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$
22	$2x + \cos x = 0,5$	$2x - \lg x - 7 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$	$2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$
23	$\sin 0,5x + 1 = x^2, x > 0$	$tg(0.44x + 0.3) = x^2$	$x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 1,5 = 0$

24	$0,5x + \lg(x - 1) = 0,5$ $x > 0$	$3x - \cos x - 1 = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$
25	$\sin(0,5 + x) = 2x - 0,5$	$\operatorname{ctgx} - \frac{x}{10} = 0$	$x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$
26	$\lg(2 + x) + 2x = 3$	$x^2 + 4\sin x = 0$	$x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$	$x^3 - 12x - 10 = 0$
27	$\lg(1 + 2x) = 2 - x$	$\operatorname{tg}(0,36x + 0,4) = x^2$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$
28	$2\sin(x - 0,6) = 1,5 - x$	$x + \lg x = 0,5$	$x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$
29	$x + \lg(1 + x) = 1,5$	$\operatorname{ctgx} - \frac{x}{5} = 0$	$x^3 + x - 3 = 0$	$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$
30	$x + \cos x = 1$	$2\lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$	$x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 3,5 = 0$

Пример. Численно решить нелинейное уравнение итерационным методом деления отрезка пополам

$$4(1 - x^2) - e^x = 0.$$

Алгоритм итерационных вычислений, адаптированный для программирования в среде Mathcad :

Начало.

Инициализация начального приближения.

Цикл пока не достигнута точность.

Вычислить следующее приближение.

Конец цикла.

Собрать в матрицу возвращаемые данные.

Вернуть матрицу как результат.

Конец.

Математическая модель метода деления отрезка пополам

С точностью ε найти корень уравнения $f(x) = 0$, локализованный в интервале $[a; b]$.

Начальные значения:

$x_0 = a$	Корень
$y_0 = f(a)$	Функция
$a_0 = a$	Левая граница
$b_0 = b$	Правая граница

Итерационные соотношения:

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{Корень}$$

$$y_{n+1} = f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \quad \text{Функция}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n, & f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \cdot f(a_n) < 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2}, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{Левая граница}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2}, & f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \cdot f(a_n) < 0 \\ b_n, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{Правая граница}$$

Критерий окончания:

$$b_n - a_n < 2\varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon .$$

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

ÇÄÄÀ×À 5. ×ÈÑÈÀÍÀ ÐÀØÀÍÈÀ ÍÄÈÈÄÉÍÄÍ ÓÐÀÄÍÄ Èß

Ðåðååå òðàííàéý ìàðíàí àååàéý òðäçåà ìíåàì

Ó ó í ê ò è ý ìèñåà éñý $f(x)=0$ â èðäðåååå $[A;B]$ ñ òñ-ìñòóð
ìàðíàí àååàéý òðäçåà ìíåàì

ε

sol (f , A , B , ε) :=	$x_0 \leftarrow A$
	$y_0 \leftarrow f(A)$
	$a_0 \leftarrow A$
	$b_0 \leftarrow B$
	$n \leftarrow 0$
	while $b_n - a_n \geq 2 \cdot \varepsilon$
	$x_{n+1} \leftarrow \frac{a_n + b_n}{2}$
	$y_{n+1} \leftarrow f(x_{n+1})$
	$a_{n+1} \leftarrow \text{if}(y_{n+1} \cdot f(a_n) < 0, a_n, x_{n+1})$
	$b_{n+1} \leftarrow \text{if}(y_{n+1} \cdot f(b_n) < 0, x_{n+1}, b_n)$
	$n \leftarrow n + 1$
	augment $\left(x, y, a, b, \frac{b - a}{2} \right)$

|
|
| ìà-àèùíå
|
| çâ÷àéý
|
|

Öèéé ìåà
íà àñòèáíóðà
òñ-ìñòó

|
|
|
| Èðäðååéý
|
|
|

ìåñ÷åò èòäðåèé

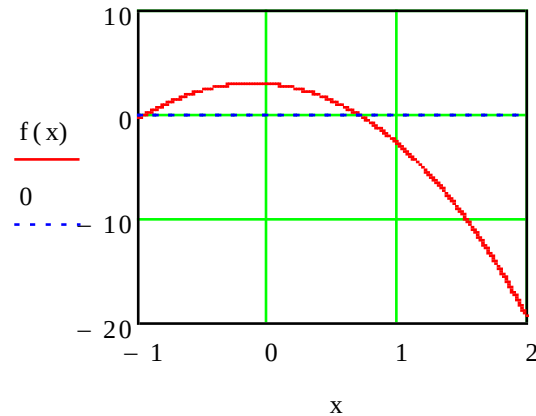
Éíííåà
ðäçóéùòàòå
â ìàððèó

Δαράζα ó δααίεα

$$f(x) := 4 \cdot (1 - x^2) - e^x$$

Έρεεçàðèý êíðý óδααίεý à ãðàðèèå òóíèèè f(x)

$$x := -1, -0.99 \dots 2$$



Δαράζα óδααίεý çàðíðàðèèðíàííé òóíèèèè sol
íàðíàí ààèáíεý ððàçèà ðíèàí à èíððàèèå [0,1] ð òí-ííðòò 0.01

$$\underline{\underline{R}} := \text{sol}(f, 0, 1, 0.01)$$

Δάç ó è ù ò à ò ù

n	x_n	y_n	a_n	b_n	$\frac{b_n - a_n}{2}$
	0	1	2	3	4
0	0	3	0	1	0.5
1	0.5	1.351	0.5	1	0.25
2	0.75	-0.367	0.5	0.75	0.125
3	0.625	0.569	0.625	0.75	0.063
4	0.688	0.121	0.688	0.75	0.031
5	0.719	-0.118	0.688	0.719	0.016
6	0.703	$2.405 \cdot 10^{-3}$	0.703	0.719	$7.813 \cdot 10^{-3}$

Έρε÷àñòàí èòððàðèè

$$\underline{\underline{m}} := \text{last}(R^{(0)})$$

$$m = 6$$

Δαράζα

$$X := (R^{(0)})_m$$

$$X = 0.7031$$

Òí-ííðòò

$$E := (R^{(4)})_m$$

$$E = 7.8125 \times 10^{-3}$$

Δαράζα óδααίεý àñððíàííé òóíèèèè Mathcad

$$\text{root}(f(x), x, 0, 1) = 0.7034395712$$

4. Численное интегрирование.

Понятие о квадратурной формуле

Вычисление определенного интеграла с помощью основной формулы интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) ,$$

где $f(x)$, скажем, непрерывная на $[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, затруднено тем, что фактическое нахождение значений $F(x)$ возможно лишь в редких случаях. По этой причине большое значение имеют формулы для приближенного вычисления интегралов.

Многие формулы для приближенного вычисления определенных интегралов имеют вид

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) . \quad (20)$$

и называются **квадратурными формулами**. Сумма в правой части последнего равенства называется **квадратурной суммой**. Числа $x_i^{(n)}$ принадлежат промежутку $[a, b]$ и называются **узлами** квадратурной формулы, а числа $A_i^{(n)}$ – **коэффициентами** квадратурной формулы. Узлы квадратурной формулы всегда будем считать занумерованными в порядке возрастания:

$$x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} \dots < x_n^{(n)} .$$

Равенство (20) является приближенным. Разность между интегралом слева и квадратурной суммой

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$$

называется **остаточным членом квадратурной формулы** (20).

Остаточный член представляет ошибку, возникающую при замене интеграла квадратурной суммой.

Простейшие квадратурные формулы

В дальнейшем будем иметь в виду геометрическую трактовку определенного интеграла как площади криволинейной трапеции, ограниченной осью x , двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и кривой $y = f(x)$.

Формулы прямоугольников

Начнем с формул прямоугольников, в которых берется единственный узел – некоторая точка c из промежутка $[a, b]$. Формула квадратур тогда имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b - a) f(c) . \quad (21)$$

Таким образом, площадь под графиком кривой $y = f(x)$ приближенно заменяется площадью прямоугольника с высотой, равной значению функции $f(x)$ при $x = c$, поэтому формула (21) называется ***формулой прямоугольников***.

Отметим важные частные случаи формулы (21). Если узел c совпадает с левым концом промежутка интегрирования $[a, b]$: $c = a$, формула (21) называется формулой ***левых прямоугольников***. Если узел c совпадает с правым концом промежутка интегрирования: $c = b$, то формула (21) называется формулой ***правых прямоугольников***. Наконец, если узел c совпадает с серединой промежутка интегрирования: $c = \frac{a + b}{2}$, то формула (21) называется формулой ***средних прямоугольников***.

Представления остаточных членов формул левых, правых и средних треугольников имеют соответственно вид

$$R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) , \quad R = -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta) ,$$

$$R = \frac{(b-a)^2}{24} f''(\eta) , \quad \text{где } a \leq \eta \leq b .$$

Если промежуток интегрирования $[a, b]$ велик, то формулы прямоугольников дают малую точность. Разделим промежуток $[a, b]$ на n частичных промежутков длины $h = (b - a)/n$ точками деления $x_i = a + i h$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. К интегралу по каждому частичному промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ применим формулу прямоугольников (21):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong h f(\alpha + i h), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 ,$$

где α – некоторая точка из промежутка $[x_0, x_1] \equiv [a, a + h]$. Суммируя правую часть последней формулы по i от 0 до $n - 1$, получим:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha + i h) . \quad (22)$$

Формула (22) называется **«большой» формулой прямоугольников**, в отличие от «малой» формулы (21). В частных случаях $\alpha = a$, $\alpha = a + i h$ и $\alpha = a + h/2$ формула (22) называется **большой формулой** соответственно **левых, правых и средних** прямоугольников.

Формула средних прямоугольников, которая наиболее часто применяется при вычислении определенных интегралов, в развернутом виде записывается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong h \sum_{i=0}^{n-1} (y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{i+\frac{1}{2}} + \dots + y_{n+\frac{1}{2}}) , \quad (23)$$

где $y_i = f(x_i)$, $y_{i+\frac{1}{2}} = f(x_i + \frac{h}{2})$.

Представления остаточных членов больших формул левых, правых и средних прямоугольников имеют соответственно вид

$$R = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta) , \quad R = -\frac{(b-a)^2}{2n} f'(\eta) ,$$

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta) , \quad \text{где } a \leq \eta \leq b .$$

Формулы трапеций

Можно повысить точность вычисления определенного интеграла, если функцию $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ заменить отрезком прямой, проходящей через две точки с координатами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Тогда квадратурная формула (20) запишется так:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] \quad (24)$$

Формула (24) называется **«малой» формулой трапеций**. Название «формула трапеций» объясняется тем, что при ее использовании упомянутая выше криволинейная трапеция приближенно заменяется прямолинейной.

Представление остаточного члена формулы трапеций имеет вид

$$R(b) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) , \quad a \leq \eta \leq b .$$

Если к интегралу по каждому частичному промежутку $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ применить формулу трапеций, заменяя на промежутке функцию $y = f(x)$ отрезком прямой, проходящей через точки с координатами (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) , где $y_i = f(x_i)$, то получим **«большую» формулу трапеций**:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{2n} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + y_n] . \quad (25)$$

Остаточный член формулы (25) записывается в виде

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b.$$

Формулы Симпсона

Более высокую степень вычисления интегралов можно получить, если функцию $f(x)$ на промежутке $[a, b]$ заменить параболой, проходящей через три точки с координатами $(a, f(a))$, $((a+b)/2, f((a+b)/2))$ и $(b, f(b))$. Тогда квадратурная формула (20) примет вид

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b-a)/2 \cdot [f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)]. \quad (26)$$

Формула (26) называется **«малой» формулой Симпсона** или **формулой парабол**.

Оценка остаточного члена формулы Симпсона дается формулой

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b.$$

Применяя к интегралу по каждому частичному промежутку $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = a + i(b-a)/2$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ формулу Симпсона (26), получим **«большую» формулу Симпсона**:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n]. \quad (27)$$

Остаточный член большой формулы Симпсона имеет вид

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b.$$

К формуле (27) можно придти, исходя из иных соображений.

Рассмотрим отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. Заменяя на нем функцию $y = f(x)$ таким образом, чтобы парабола проходила через точки с координатами (x_{i-1}, y_{i-1}) , $(x_{i-1/2}, y_{i-1/2})$, (x_i, y_i) , построим интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ (см. п. 1. Интерполирование):

$$\begin{aligned}
 L(x) &= y_{i-1} \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_{i-1/2})(x_{i-1} - x_i)} + \\
 &+ y_{i-1/2} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_i)} + y_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-1/2})} = \\
 &= y_{i-1} \frac{2(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{h^2} + y_{i-1/2} \frac{4(x - x_{i-1})(x_i - x)}{h^2} + \\
 &+ y_i \frac{2(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{h^2}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].
 \end{aligned} \tag{28}$$

Введем переменную $t \in [0, 1]$ с помощью равенства $x = x_{i-1} + ht$, тогда:

$$\begin{aligned}
 x - x_{i-1} &= ht, \\
 x - x_i &= x - x_{i-1} + x_{i-1} - x_i = ht - h = h(t - 1), \\
 x - x_{i-1/2} &= x - x_{i-1} + x_{i-1} - x_{i-1/2} = ht - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}(2t - 1).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Значениям t , равным 0 , $\frac{1}{2}$, 1 , соответствуют значения x , равные

x_{i-1} , $x_{i-1/2}$, x_i . Выразим многочлен (28) через переменную t :

$$\begin{aligned}
 L(x) &= \tilde{L}(t) = y_{i-1}(2t - 1)(t - 1) + 4y_{i-1/2}t(1 - t) + y_i t(2t - 1) = \\
 &= y_{i-1}(2t^2 - 3t + 1) + 4y_{i-1/2}(t - t^2) + y_i(2t^2 - t).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Воспользовавшись тем, что

$$\int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)dt = \int_0^1 (t - t^2)dt = \int_0^1 (2t^2 - t)dt = \frac{1}{6},$$

вновь приходим к формуле Симпсона:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} L(x)dx = \sum_{i=1}^n h \int_0^1 \tilde{L}(t)dt = \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} (y_{i-1} + 4y_{i-1/2} + y_i) = \\ &= \frac{h}{6} \left(y_0 + y_n + \sum_{i=1}^n (4y_{i-1/2} + 2y_i) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Погрешность вычислений при условии, что подынтегральная функция имеет непрерывную производную четвертого порядка, оценивается формулой:

$$R \leq \frac{b-a}{2880} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)| \cdot h^4 = \frac{(b-a)5}{2880 n^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|.$$

Задача 6

Задание. Вычислить приближенное значение интеграла:

- по формуле прямоугольников;
- по формуле трапеций;
- по формуле Симпсона.

Оценить погрешность каждого метода, сравнив полученные результаты с точным значением, вычисленным с помощью встроенного оператора

интегрирования Mathcad  .

Таблица 26

вариант		вариант		вариант	
1	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	11	$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+0.6 \sin x}$	21	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$
2	$\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$	12	$\int_{0.1}^{1.1} \frac{3x + \sin x}{x^2}$	22	$\int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$
3	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx$	13	$\int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$	23	$\int_2^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$
4	$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$	14	$\int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$	24	$\int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$
5	$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$	15	$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$	25	$\int_0^3 \sqrt{1+\cos^2 x} dx$
6	$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$	16	$\int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	26	$\int_0^{0.5} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$
7	$\int_2^3 \frac{dx}{1+\sqrt{\ln x}}$	17	$\int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$	27	$\int_{1.2}^{2.2} 2.6x^2 \ln x dx$
8	$\int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx$	18	$\int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$	28	$\int_1^7 \frac{e^x dx}{x}$
9	$\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$	19	$\int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$	29	$\int_4^{10} \frac{dx}{\lg x}$
10	$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$	20	$\int_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$	30	$\int_2^4 \frac{\sqrt{100+x^4}}{x^2} dx$

Пример. Вычислить приближенное значение интеграла по квадратурной формуле Ньютона («правило трех восьмых»).

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

Задача 6. Численное интегрирование по квадратурной формуле Ньютона

Численное интегрирование по квадратурной формуле Ньютона ("правило трех восьмых")

$$\int_{x_0}^{x_3} y \, dx = \frac{3 \cdot h}{8} (y_0 + 3 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + y_3)$$

где h - интервал между точками x0, x1, x2, x3

Исходные данные задачи

$$y(x) := \sin(x)$$

Интегрируемая функция

$$a := 1$$

$$b := \pi$$

Пределы интегрирования

$$n := 3$$

Количество отрезков интегрирования

$$d := \frac{b - a}{n}$$

Длина отрезка интегрирования

$$h := \frac{d}{3}$$

Интервал между точками внутри отрезка интегрирования

Формула расчета интеграла по правилу трех восьмых, использующая данные, определенные выше

$$\text{Int} := \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{3 \cdot h}{8} \cdot (y(d \cdot i + 0 \cdot h) + 3 y(d \cdot i + 1 \cdot h) + 3 y(d \cdot i + 2 \cdot h) + y(d \cdot i + 3 \cdot h)) \right]$$

Решение задачи

$$\text{Int} = 1.5403648785$$

Результат численного интегрирования

Проверка решения задачи

$$\int_a^b y(x) dx = 1.5403023059$$

Результат численного интегрирования
встроенным оператором Mathcad

$$\int_a^b y(x) dx \rightarrow \cos(1) + 1 \text{ float}, 10 \rightarrow 1.540302306$$

Результат взятия опре-
деленного интеграла
символьным процес-
сором Mathcad
и точное численное
значение интеграла

5. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид:

$$y' = f(x, y). \quad (32)$$

Решением дифференциального уравнения (32) называется функция $y = \phi(x)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество: $\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$. График решения $y = \phi(x)$ называется *интегральной кривой*.

Задача Коши для дифференциального уравнения (32) заключается в том, чтобы найти решение уравнения (32), удовлетворяющее начальному условию

$$y|_{x=x_0} = y_0. \quad (33)$$

Решение задачи Коши называется *частным решением* уравнения (32) при условии (33). Частному решению соответствует одна из интегральных кривых, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Численное решение задачи Коши состоит в том, чтобы получить искомое решение $\phi(x)$ в виде таблицы его приближенных значений для заданных значений аргумента x на некотором отрезке $[a, b]$:

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b. \quad (34)$$

Точки (34) называют узловыми точками, а множество этих точек называют сеткой на отрезке $[a, b]$. Выберем равномерную сетку с шагом h :

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = x_{i-1} + h, \text{ или } x_i = x_0 + i \cdot h \quad (i = 1, \dots, n).$$

Приближенные значения численного решения задачи Коши в узловых точках x_i обозначим через y_i . Эти значения зависят от шага разбиения h :

$$y_i(h) \approx \phi(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Погрешность численного метода решения задачи Коши на сетке отрезка $[a, b]$ оценивается величиной

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |y_i - \phi(x_i)| \},$$

которую называют расстоянием между значениями приближенного решения $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ и точного решения $(\phi(x_0), \phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$ на сетке.

Метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. Он основан на графическом построении решения дифференциального уравнения.

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке $P_0(x_0, y_0)$ есть $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Найдем ординату y_1 касательной, соответствующей абсциссе $x_1 = x_0 + h$. Так как уравнение касательной к кривой в точке P_0 имеет вид $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, то приращение ординаты $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ приближенного решения на шаге h будет $\Delta y_0 = h \cdot f(x_0, y_0)$, и тогда $y_1 = y_0 + \Delta y_0$.

Угловой коэффициент в точке $P_1(x_1, y_1)$ также находится из данного дифференциального уравнения: $y'_1 = f(x_1, y_1)$. На следующем шаге получаем новую точку $P_2(x_2, y_2)$, причем

$$x_2 = x_1 + h, \quad \Delta y_1 = h \cdot f(x_1, y_1), \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1.$$

Продолжая вычисления, получим *формулу Эйлера* для n приближенных значений решения задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом h :

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad \Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (35)$$

Графической иллюстрацией приближенного решения является ломаная (рис. 1), соединяющая последовательно точки $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, которую называют ломаной Эйлера.

С помощью рис. 1 можно оценить погрешность метода Эйлера. Определив погрешность на каждом шаге как разность между точным значением функции и соответствующим значением касательной, и применив разложение точного решения по формуле Тейлора, получим:

$$\begin{aligned} d_0 &= \varphi(x_1) - [\varphi(x_0) + hf(x_0, y_0)] = \varphi(x_0 + h) - [\varphi(x_0) + hf(x_0, y_0)] = \\ &= \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \varphi''(x_0)\frac{h^2}{2!} + \dots - [\varphi(x_0) + hf(x_0, y_0)] \approx \varphi''(x_0)\frac{h^2}{2!}. \end{aligned}$$

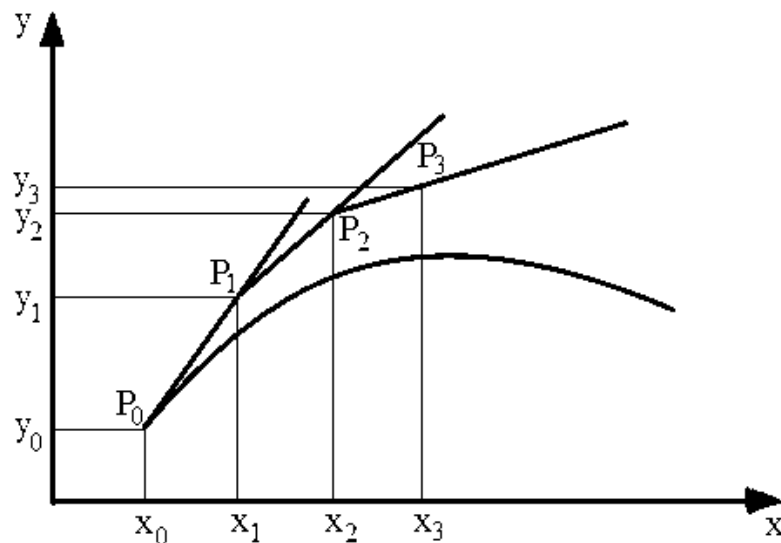


Рис. 1

Суммарную погрешность можно оценить неравенством

$$d \leq \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |\varphi''(x)| h^2 n = \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} |\varphi''(x)| (b-a) h.$$

Это означает, что метод Эйлера имеет первый порядок точности по h . В частности, при уменьшении шага h в 10 раз погрешность уменьшится примерно в 10 раз.

Известны различные уточнения метода Эйлера.

Методы Эйлера-Коши и Рунге-Кутты

Численные методы решения задачи Коши на равномерной сетке отрезка $[a, b]$ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ называются *методами Рунге-Кутты*, если, начиная с исходных данных (x_0, y_0) , решение ведется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \Delta y_i &= \sum_{j=1}^p d_j k_i^{(j)}, \quad k_i^{(j)} = hf(x_i + c_j h, y_i + c_j k_i^{(j-1)}). \end{aligned} \quad (36)$$

Метод называется *методом Рунге-Кутты порядка p* , если он имеет p -й порядок точности по шагу h на сетке. Порядок точности достигается с помощью формул (36) при определенных значениях коэффициентов c_j и d_j ($j = 1, 2, \dots, p$), при этом всегда $c_1 = 0$.

- Если $p = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$, то в этом частном случае формулы (36) преобразуются в соотношения (35) – метод Эйлера, который можно назвать методом Рунге-Кутты первого порядка:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ \Delta y_i &= d_1 k_i^{(1)}, \quad k_i^{(1)} = hf(x_i, y_i), \quad \text{т.е. } \Delta y_i = hf(x_i, y_i). \end{aligned}$$

- Метод Рунге-Кутты второго порядка называют методом Эйлера-Коши, если $p = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$. Согласно формулам (36), алгоритм его выглядит следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{2} (k_i^{(1)} + k_i^{(2)}), \quad k_i^{(1)} = hf(x_i, y_i), \quad k_i^{(2)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_i^{(1)}\right).$$

- Наиболее употребительным является метод Рунге-Кутты второго порядка, когда $p = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. Формула (36) примет вид:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\Delta y_i = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_i^{(1)}\right), \quad k_i^{(1)} = hf(x_i, y_i).$$

- Метод Рунге-Кутты четвертого порядка называют *классическим методом Рунге-Кутты*, если

$$p = 4, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = 1, \quad d_1 = d_4 = \frac{1}{6}, \quad d_2 = d_3 = \frac{1}{3}.$$

Из формул (36) получаем алгоритм:

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}),$$

$$k_i^{(1)} = hf(x_i, y_i), \quad k_i^{(2)} = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_i^{(1)}\right),$$

$$k_i^{(3)} = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_i^{(2)}\right), \quad k_i^{(4)} = hf(x_i + h, y_i + k_i^{(3)}).$$

Задача 7

Задание: используя метод Эйлера-Коши, вычислить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг $h = 0,1$. Сравнить результат с решением, полученным ППП Mathcad с помощью функции *Odesolve* в блоке решения *Given*.

Таблица 26

1	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$[1,8;2,8]$
2	$y' = x + \cos \frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$[1,6;2,6]$
3	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$[0,6;1,6]$
4	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$[0,5;1,5]$
5	$y' = x + \cos \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$[1,7;2,7]$
6	$y' = x + \cos \frac{y}{2,25}$	$y_0(1,4) = 2,2$	$[1,4;2,4]$
7	$y' = x + \cos \frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$[1,4;2,4]$
8	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$[0,8;1,8]$
9	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,2) = 2,1$	$[1,2;2,2]$
10	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$[2,1;3,1]$
11	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$[1,8;2,8]$
12	$y' = x + \sin \frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$[1,6;2,6]$

13	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$[0,6;1,6]$
14	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$[0,5;1,5]$
15	$y' = x + \sin \frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$[1,7;2,7]$
16	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2,8}}$	$y_0(1,4) = 2,2$	$[1,4;2,4]$
17	$y' = x + \sin \frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$[1,4;2,4]$
18	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,3$	$[0,8;1,8]$
19	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1) = 1,5$	$[1,1;2,1]$
20	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(0,6) = 1,2$	$[0,6;1,6]$
21	$y' = x + \sin \frac{y}{1,25}$	$y_0(0,5) = 1,8$	$[0,5;1,5]$
22	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1,5}}$	$y_0(0,2) = 1,1$	$[1,2;2,2]$
23	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$y_0(0,1) = 0,8$	$[0,1;1,1]$
24	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$[0,5;1,5]$
25	$y' = x + \sin \frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(1,2) = 1,4$	$[1,2;2,2]$
26	$y' = x + \cos \frac{y}{1,25}$	$y_0(0,4) = 0,8$	$[0,4;1,4]$
27	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1,5}}$	$y_0(0,3) = 0,9$	$[0,3;1,3]$
28	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$y_0(1,2) = 1,8$	$[1,2;2,2]$

29	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,7) = 2,1$	$[0,7;1,7]$
30	$y' = x + \cos \frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(0,9) = 1,7$	$[0,9;1,9]$

Задача 8

Задание: используя метод Рунге-Кутты второго порядка вычислить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[0,1]$; шаг $h = 0,1$. Сравнить результат с решением, полученным ППП Mathcad с помощью функции *Odesolve* в блоке решения *Given*.

Таблица 27

1	$y' = 1 + 0,2 y \sin x - y^2$	$y(0) = 0$
2	$y' = \cos(x + y) + 0,5(x - y)$	$y(0) = 0$
3	$y' = \frac{\cos x}{x + 1} - 0,5 y^2$	$y(0) = 0$
4	$y' = (1 - y^2) \cos x + 0,6 y$	$y(0) = 0$
5	$y' = 1 + 0,4 y \sin x - 1,5 y^2$	$y(0) = 0$
6	$y' = \frac{\cos y}{x + 2} + 0,3 y^2$	$y(0) = 0$
7	$y' = \cos(1,5x + y) + (x - y)$	$y(0) = 0$
8	$y' = 1 - \sin(x + y) + \frac{0,5 y}{x + 2}$	$y(0) = 0$
9	$y' = \frac{\cos y}{1,5 + x} + 0,1 y^2$	$y(0) = 0$
10	$y' = \cos(2x + y) + 1,5(x - y)$	$y(0) = 0$
11	$y' = 1 - \frac{0,1 y}{x + 2} - \sin(2x + y)$	$y(0) = 0$

12	$y' = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,1y^2$	$y(0) = 0$
13	$y' = 1 + 0,8y \sin x - 2y^2$	$y(0) = 0$
14	$y' = \cos(1,5x + y) + 1,5(x - y)$	$y(0) = 0$
15	$y' = 1 - \sin(2x + y) + \frac{0,3y}{x + 2}$	$y(0) = 0$
16	$y' = \frac{\cos y}{1,75 + x} - 0,5y^2$	$y(0) = 0$
17	$y' = 1 + (1 - x) \sin y - (2 + x)y$	$y(0) = 0$
18	$y' = (0,8 - y^2) \cos x + 0,3y$	$y(0) = 0$
19	$y' = 1 + 2,2 \sin x + 1,5y^2$	$y(0) = 0$
20	$y' = \cos(x + y) + 0,75(x - y)$	$y(0) = 0$
21	$y' = 1 - \sin(1,25x + y) + \frac{0,5y}{x + 2}$	$y(0) = 0$
22	$y' = \frac{\cos y}{x + 2} - 0,3y^2$	$y(0) = 0$
23	$y' = 1 - \sin(1,75x + y) + \frac{0,1y}{x + 2}$	$y(0) = 0$
24	$y' = \frac{\cos y}{1,25 + x} - 0,5y^2$	$y(0) = 0$
25	$y' = \sin(1,5x + y) - 2,25(x + y)$	$y(0) = 0$
26	$y' = \frac{\sin y}{1,5 + x} - 1,25y^2$	$y(0) = 0$
27	$y' = 1 - (x - 1) \sin y + 2(x + y)$	$y(0) = 0$
28	$y' = 1 - \sin(0,75x - y) + \frac{1,75y}{x - 1}$	$y(0) = 0$
29	$y' = \cos(x - y) + \frac{1,25y}{1,5 + x}$	$y(0) = 0$
30	$y' = \frac{\cos y}{x + 1,5} - 1,2y^2$	$y(0) = 0$

Пример. Вычислить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения первого порядка классическим методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Сравнить результат с решением, полученным ППП Mathcad с помощью функции Odesolve в блоке решения Given.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

Численные задачи 7-8. Решить задачу Коши

решить задачу Коши с помощью ППП Mathcad

$$\frac{d}{dx}y(x) = -y + \sin[y \cdot (x - 2)] \quad \text{äý} \quad x_0=0, y_0=1.5, \quad b=30$$

сравнить результат с решением, полученным ППП Mathcad

Решение задачи Коши с помощью ППП Mathcad

Решить задачу Коши с помощью ППП Mathcad

Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

Решить задачу Коши с помощью ППП Mathcad

ORIGIN := 0 Äý решить задачу Коши с помощью ППП Mathcad

```

SolveRK4 (f, x0, y0, b, n) :=
  a ← x0
  h ← (b - a) / n
  x0 ← x0
  y0 ← y0
  for i ∈ 0.. n - 1
    xi+1 ← xi + h
    k1i ← h · f(xi, yi)
    k2i ← h · f(xi + 1/2 · h, yi + 1/2 · k1i)
    k3i ← h · f(xi + 1/2 · h, yi + 1/2 · k2i)
    k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    yi+1 ← yi + 1/6 · (k1i + 2 · k2i + 2 · k3i + k4i)
  (
    x
    y
  )

```

l'algorithm SolveRK4:

f - è l'expression de la fonction à intégrer

x0, y0 - les valeurs initiales

b - la valeur de l'abscisse finale [x0 ; b]

n - le nombre de pas de calcul

l'ordre de la fonction f est 2

l'abscisse x est comprise entre 0 et 1

l'ordonnée y est comprise entre 0 et 1

Àú-èñéáíéà ðåååëý çàää÷è çàìñððàìèðíàáíùì àòíàì

$f(x, y) := -y + \sin[y \cdot (x - 2)]$ Ìðàààý ÷ àñòù óðàáíáëý.

Ìðñëýàòñý êàè òóíéòëý Mathcad.

$x0 := 0$

$y0 := 1.5$

Ìà÷àèùíà óñëíàëý

$b := 30$

Конец интервала интегрирования

$n := 50$

Êíèè÷àñòàì òðåçêèà â èòððààèà èòååððíààëèý

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := \text{SolveRK4}(f, x0, y0, b, n)$

Ðåååêå çàìñððàìèðíàáííé

âñåá óóíéòëáé

Àúâñà âú÷èñëáííàì

ðåååëý â òàáèèòó:

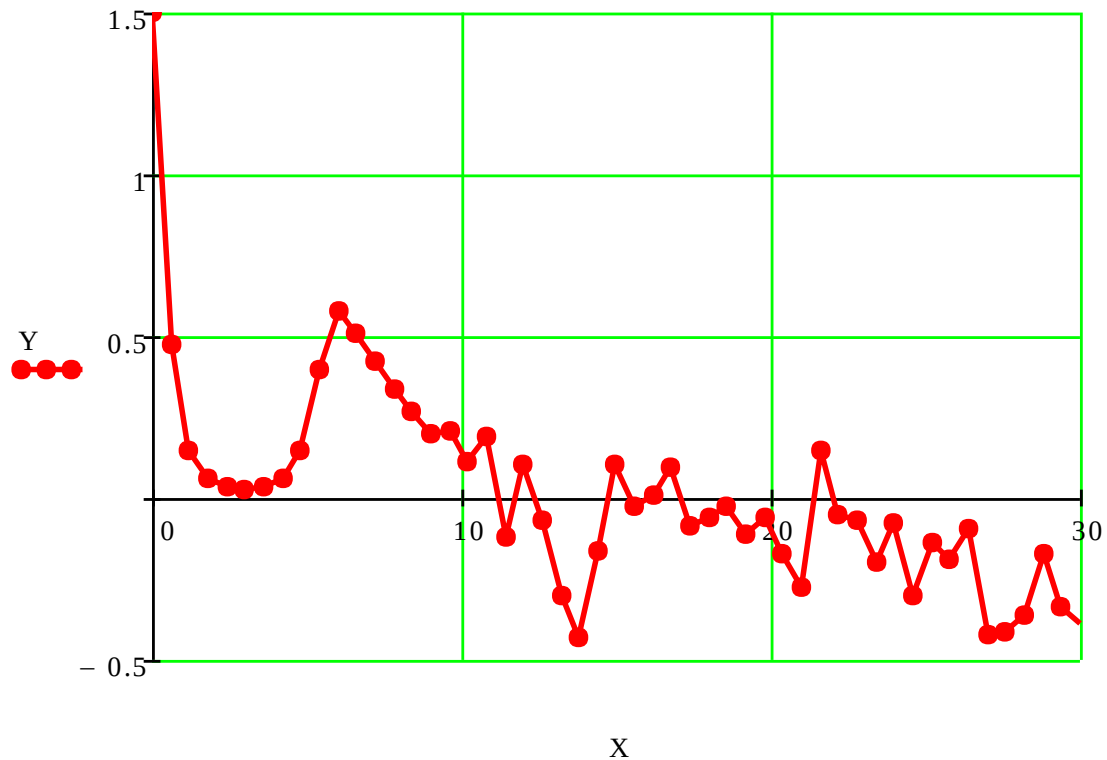
0-é ñòëåáð - X

1-é ñòëåáð - Y

$M^{(0)} := X \quad M^{(1)} := Y$

M =

	0	1
0	0.000	1.500
1	0.600	0.472
2	1.200	0.145
3	1.800	0.059
4	2.400	0.035
5	3.000	0.029
6	3.600	0.035
7	4.200	0.059
8	4.800	0.143
9	5.400	0.399
10	6.000	0.578
11	6.600	0.510
12	7.200	0.420
13	7.800	0.341
14	8.400	0.267
15	9.000	...

$$\tilde{A} \partial \alpha \hat{o} \hat{e} \hat{e} \hat{a} \hat{u} \div \hat{e} \hat{n} \hat{e} \hat{a} \hat{i} \hat{i} \hat{a} \hat{i} \partial \hat{a} \emptyset \hat{a} \hat{i} \hat{e} \hat{y} \ Y(X)$$


Проверка решения задачи

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = m v \frac{d^2x}{dt^2}$

Given

Íà÷àëî áëîëà đăøăîèÿ

$$f(x, y) := -y + \sin [y \cdot (x - 2)]$$

$$\text{ĩđâàÿ} \div \text{ãñòü} \text{ óđâíâêÿ.}$$
$$\hat{L} \hat{O} \hat{I} \hat{E} \hat{Y} \hat{A} \hat{O} \hat{N} \hat{Y} \hat{E} \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{O} \hat{I} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{Y} \text{ Mathcad.}$$

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Äèôöǎǎñèàëüïå óǎâîáèå.

l'õeçâiãlây îáîçlã÷àãõñy ñèlãêîl '

Äëÿ ââïäà ýòïãî ñèìâïèà ìæàòü Ctrl + F7.

Çíaê eĩãè÷ǎñêĩãî ðàâǎĩñòâà ââĩãèòñÿ

Ctrl + =

$$y(x_0) = y_0$$

Íà÷àëüíûå óñěĩàèÿ.

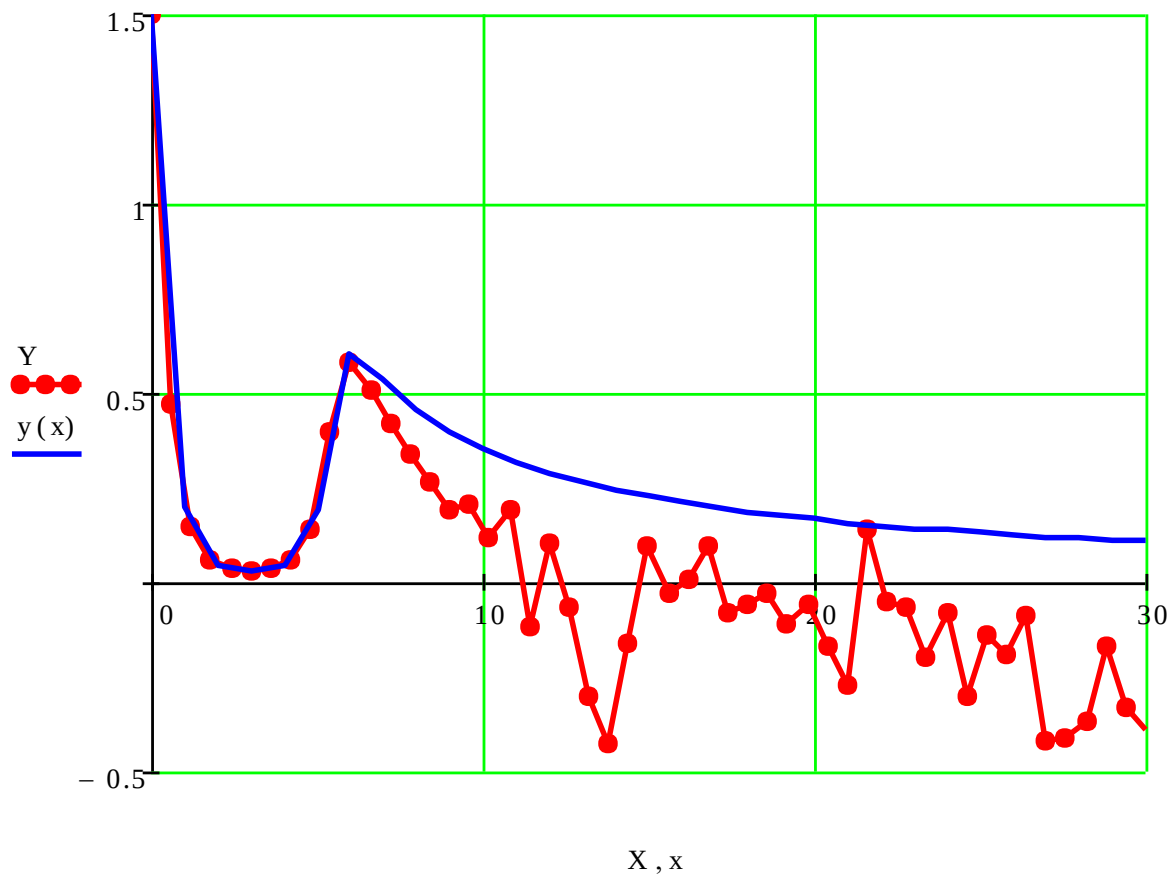
```
y := Odesolve (x, 30)
```

Đã có mặt ở đây - ô nhiễm môi trường y(x)

â àèàïçĩă àđăóĩăîòà îò x0 âî30

Ääöëèêê âû-èñëáííäí äååáíëý $Y(X)$ è äñòäíííäí äååáíëý $y(x)$

$x := x0..b$



Äëý íäûåáíëý òí-íñòè âû-èñëáíëý äååáíëý çàíðäòàíèäñäáííü
 íäòíäí Äóíää-Éóòòà íäíäíäèí çäääòü áíëûååä éíëè-äñòäí òäçéíä
 èíäääèäñäíëý n . Íäè $n=1000$ äååáíëä íäòíäí Äóíää-Éóòòà ñäíäääò
 ñ äååáíëäí í Odesolve.

6. Решение дифференциальных уравнений в частных производных

Дифференциальными уравнениями в частных производных (УЧП) называются дифференциальные уравнения, содержащие частные производные. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в УЧП неизвестная функция зависит от нескольких переменных.

УЧП классифицируются:

1. По порядку уравнения (порядком УЧП называют наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение):
 - $u_t = u_x$ (уравнение первого порядка);
 - $u_t = u_{xx}$ (уравнение второго порядка);
 - $u_t = uu_{xxx} + \sin x$ (уравнение третьего порядка).
2. По числу независимых переменных:
 - $u_t = u_{xx}$ (уравнение с двумя переменными);
 - $u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$ (уравнение с тремя переменными r, θ, t).
3. По критерию «линейное/нелинейное».
4. По критерию «однородное/неоднородное».
5. По виду коэффициентов.

Основные типы линейных уравнений:

Параболический (например $u_t = u_{xx}$).

Гиперболический (например $u_{tt} = u_{xx}$).

Эллиптический (например $u_{xx} + u_{yy} = 0$).

Для каждого класса и типа УЧП существует своя общая теория и методы решения.

Метод сеток для решения смешанной задачи для уравнения параболического типа (уравнения теплопроводности)

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (37)$$

Смешанная задача заключается в нахождении искомой функции $u(x, t)$, удовлетворяющей заданному уравнению в частных производных, краевым, а так же начальным условиям.

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности (37) с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < a \quad (38)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \varphi(t); \\ u(a, t) &= \phi(t). \end{aligned} \quad (39)$$

Физически эту задачу можно представить как задачу о распространении тепла в однородном стержне, на концах которого поддерживается требуемый температурный режим, заданный условиями (39).

Построим в области равномерную сетку с шагом h по оси x и шагом k по t (рис. 2).

Обозначим $x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t_j = jk \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$

$u(x_i, t_j) = u_{ij}$. Заменим в каждом внутреннем узле (x_i, t_j) производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

разностным отношением $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$, а производную $\frac{\partial u}{\partial t}$

одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}.$$

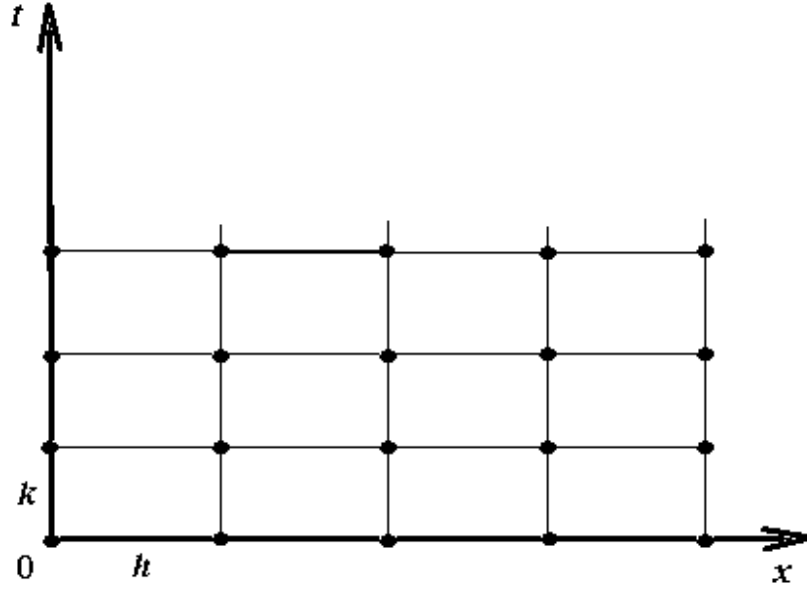


Рис. 2

Тогда для уравнений (37) получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (40)$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (41)$$

Обозначив $\sigma = \frac{k}{h^2}$, приводим уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (42)$$

$$u_{i,j-1} = (1 + 2\sigma)u_{ij} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (43)$$

где $u_{0j} = \varphi(t_j)$, $u_{nj} = \phi(t_j)$.

Для составления уравнения (42) использована схема узлов, данная на рис. 3 (*явная схема*), для уравнения (43) – схема узлов, данная на рис. 4 (*неявная схема*).

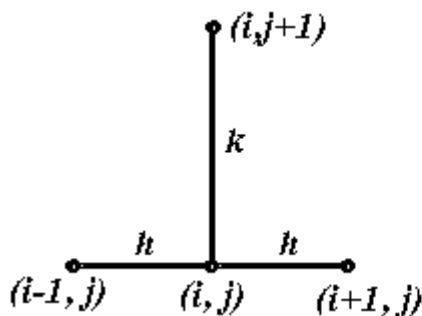


Рис. 3

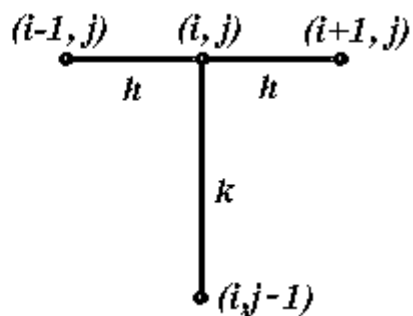


Рис. 4

При выборе σ в уравнениях следует учитывать два обстоятельства:

- 1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;
- 2) разностное уравнение должно быть устойчивым.

Доказано, что уравнение (42) будет устойчиво при $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, а уравнение (43) – при любом σ . Наиболее удобный вид уравнение (42) имеет при $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} - u_{i+1,j}}{2}, \quad (44)$$

и при $\sigma = \frac{1}{6}$:

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{ij} + u_{i+1,j}). \quad (45)$$

Задача 9

Задание. Используя явную схему метода сеток, составить решение смешанной задачи для дифференциального уравнения параболического типа

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (уравнение теплопроводности) при заданных начальных условиях

$u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(0.6, t) = \phi(t)$, где $x \in [0, 0.6]$. Решение найти при $h = 0.1$ для $t \in [0, 0.01]$, считая $\sigma = 1/6$.

Таблица 28

1	$u(x, 0) = \cos 2x$	$u(0, t) = 1 - 6t$	$u(0.6, t) = 0.3624$
2	$u(x, 0) = x(x + 1)$	$u(0, t) = 0$	$u(0.6, t) = 2t + 0.96$
3	$u(x, 0) = 1.2 + \lg(x + 0.4)$	$u(0, t) = 0.8 + t$	$u(0.6, t) = 1.2$
4	$u(x, 0) = \sin 2x$	$u(0, t) = 2t$	$u(0.6, t) = 0.932$
5	$u(x, 0) = 3x(2 - x)$	$u(0, t) = 0$	$u(0.6, t) = t + 2.52$
6	$u(x, 0) = 1 - \lg(x + 0.4)$	$u(0, t) = 1.4$	$u(0.6, t) = t + 1$
7	$u(x, 0) = \sin(0.55x + 0.03)$	$u(0, t) = t + 0.03$	$u(0.6, t) = 0.354$
8	$u(x, 0) = 2x(1 - x) + 0.2$	$u(0, t) = 0.2$	$u(0.6, t) = t + 0.68$
9	$u(x, 0) = \sin x + 0.8$	$u(0, t) = 0.08 + 2t$	$u(0.6, t) = 0.6446$
10	$u(x, 0) = \cos(2x + 0.19)$	$u(0, t) = 0.932$	$u(0.6, t) = 0.1798$
11	$u(x, 0) = 2x(x + 0.2) + 0.4$	$u(0, t) = 2t + 0.4$	$u(0.6, t) = 1.36$
12	$u(x, 0) = \lg(x + 0.26) + 1$	$u(0, t) = 0.415 + t$	$u(0.6, t) = 0.9345$
13	$u(x, 0) = \sin(x + 0.45)$	$u(0, t) = 0.435 - 2t$	$u(0.6, t) = 0.8674$
14	$u(x, 0) = 0.3 + x(x + 0.4)$	$u(0, t) = 0.3$	$u(0.6, t) = 6t + 0.9$
15	$u(x, 0) = (x - 0.2)(x + 1) + 0.2$	$u(0, t) = 6t$	$u(0.6, t) = 0.84$
16	$u(x, 0) = x(0.3 + 2x)$	$u(0, t) = 0$	$u(0.6, t) = 6t + 0.9$
17	$u(x, 0) = \sin(x + 0.48)$	$u(0, t) = 0.4618$	$u(0.6, t) = 3t + 0.882$
18	$u(x, 0) = \sin(x + 0.02)$	$u(0, t) = 3t + 0.02$	$u(0.6, t) = 0.581$
19	$u(x, 0) = \cos(x + 0.48)$	$u(0, t) = 6t + 0.887$	$u(0.6, t) = 0.4713$
20	$u(x, 0) = \lg(2.63 - x)$	$u(0, t) = 3(0.14 - t)$	$u(0.6, t) = 0.3075$
21	$u(x, 0) = 1.5 - x(1 - x)$	$u(0, t) = 3(0.5 - t)$	$u(0.6, t) = 1.26$
22	$u(x, 0) = \cos(x + 0.48)$	$u(0, t) = 6(t + 0.11)$	$u(0.6, t) = 0.1205$
23	$u(x, 0) = \lg(2.42 + x)$	$u(0, t) = 0.3838$	$u(0.6, t) = 6(0.08 - t)$
24	$u(x, 0) = 0.6 + x(0.8 - x)$	$u(0, t) = 0.6$	$u(0.6, t) = 3(0.24 + t)$
25	$u(x, 0) = \cos(x + 0.66)$	$u(0, t) = 3t + 0.79$	$u(0.6, t) = 0.3058$

26	$u(x, 0) = \lg(1.43 + 2x)$	$u(0, t) = 0.1553$	$u(0.6, t) = 3(t + 0.14)$
27	$u(x, 0) = 0.9 + 2x(1-x)$	$u(0, t) = 3(0.3 - 2t)$	$u(0.6, t) = 1.38$
28	$u(x, 0) = \lg(1.95 + x)$	$u(0, t) = 0.29 - 6t$	$u(0.6, t) = 0.4065$
29	$u(x, 0) = 2 \cos(x + 0.55)$	$u(0, t) = 1.705$	$u(0.6, t) = 0.817 + 3t$
30	$u(x, 0) = x(1-x) + 0.2$	$u(0, t) = 0.2$	$u(0.6, t) = 2(t + 0.22)$

Пример. Численно решить дифференциальное уравнение параболического типа при заданных начальных и краевых условиях. Для решения использовать явную схему метода сеток.

Решение. Одним из вариантов решения данного примера с применением ППП Mathcad может быть такой:

Задача 9. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных и краевых условиях

$u(x, 0) = \cos(2 \cdot x)$,
 $u(0, t) = \sin(3 \cdot t)$, $u(0.6, t) = \cos(4 \cdot t)$, $x \in [0; 0.6]$.

Решить задачу с помощью явной схемы метода сеток.

Дано: $h = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $\sigma = \frac{1}{6}$.

Решение: $\sigma = \frac{1}{6}$.

Решить задачу с помощью явной схемы метода сеток.

$X := 0.6$, $T := 0.01$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $x \in [0; X]$, $t \in [0; T]$

$h := 0.1$, $n_x := \frac{X}{h}$, $n_x = 6$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.01$, $x \in [0; X]$, $t \in [0; T]$

$$k := \frac{h^2}{6} \quad k = 1.667 \times 10^{-3} \quad nt := \frac{T}{k} \quad nt = 6$$

Øàã ït (k) è èïè÷ãñðâï
 èïðððàèñ ït (nt)
 ïðè óññïàèè $\sigma = \frac{1}{6}$

Программирование решения зад

ачи явной схемой метода сеток

Çàïñððàïëðóàï ðððáíåà àèðððððèèèïñï ððððíèý ï òñðíó-
 èàì, ïðèððððíï à ààïï ð÷ððï ïñïàèè. Ðàñ÷àð ïðïðèáí

ïðððàïïé óóíèèèé Mathcad . Óóíèèè

PDEgrid ïà èìðð ïàððð-

ððïà è èñïèùçóðð ïððððððíïð àùðð ààïíð. Ðàçóèùðàð ððððíèý -

ìàððèðà óóíèèè u á óçèàð ñàðèè è çïà÷áíý àððóñïðïà

x è t á óçèàð

ñàðèè.

$\text{PDEgrid} :=$	<pre> for i ∈ 0.. nx x_i ← i·h for j ∈ 0.. nt t_j ← j·k for i ∈ 1.. nx u_{i,0} ← cos (2·x_i) for j ∈ 0.. nt u_{0,j} ← sin (3·t_j) u_{nx,j} ← cos (4·t_j) for j ∈ 0.. nt - 1 for i ∈ 1.. nx - 1 u_{i,j+1} ← 1/6 · (u_{i-1,j} + 4·u_{i,j} + u_{i+1,j}) (x t u) </pre>	Ðàñ÷àð ñàðèè ï ò Ðàñ÷àð ñàðèè ï t Çàïñïàíåà ñàðèè ïà÷èùíèè óññïàèýìè u(x,0) Çàïñïàíåà ñàðèè ãððàíè÷íèè óññïàèýìè u(0,t) è u(X,t) Ùèèèù ï ãñàì óçèàì ñàðèè Ðàñ÷àð u á óçèàð ïðè $\sigma = \frac{1}{6}$ Âçððàð ðàçóèù- òàðïà: ààèððð x è t, ìàððèðà óóíèèè u(x,t).
---------------------	---	--

Âû÷èñeáëá ðåðåíý çàää÷è ýåñë ñåãñë àòñàà ñåðë

$$\begin{pmatrix} x \\ t \\ u \end{pmatrix} := \text{PDEgrid} \quad \begin{array}{l} \text{Ðåðåíåá òðååñåíý çàðññåðà-} \\ \text{ìåðñåññë áûðåá òóëëåðå} \end{array}$$

Âûåñà àòðåòû ðåðåíý $u(x,t)$: àðåóñåð x èååð ñååððó áíç
àðåóñåð t èååð ñååàà ìåðåå

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 5 \times 10^{-3} & 10 \times 10^{-3} & 0.015 & 0.02 & 0.025 & 0.03 \\ 0.98 & 0.807 & 0.691 & 0.609 & 0.548 & 0.501 & 0.464 \\ 0.921 & 0.915 & 0.881 & 0.838 & 0.795 & 0.755 & 0.718 \\ 0.825 & 0.82 & 0.814 & 0.807 & 0.799 & 0.789 & 0.779 \\ 0.697 & 0.692 & 0.705 & 0.724 & 0.744 & 0.761 & 0.775 \\ 0.54 & 0.643 & 0.711 & 0.758 & 0.793 & 0.819 & 0.839 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0.999 & 0.999 \end{pmatrix}$$

Âûåñà ååèòññ àðåóñåðå ðåðåíý x è t á ñòðëó

$$x^T = (0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6)$$

$$t^T = (0 \quad 1.667 \times 10^{-3} \quad 3.333 \times 10^{-3} \quad 5 \times 10^{-3} \quad 6.667 \times 10^{-3} \quad 8.333 \times 10^{-3} \quad 0.01)$$

Ìñåðçåà ðåñ÷åà ðåðåíåá çàää÷è åñòñåññë ñååññååèè Mathcad

òóëëåðå Pdesolve á áåñåá ðåðåíý Given .

×åñòñåá ìåçååñåññå áåñåòññ á áûðååñåññ Mathcad á ìåååå

òåññåññå èåååñå (ìñåå ååñåà ñååññåà òñ÷è)

Çåå èñå÷åññåå ðåååññåå ååñåòññ ìåååðååá Ctrl +=

Given

ìå÷åññåå ðåðåíý

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad \text{ìåååñå÷åññå ååòòåðååååññå òðååñåå}$$

$$u(x, 0) = \cos(2 \cdot x)$$

$$u(0, t) = \sin(3 \cdot t)$$

|
|

ìå÷åññåå è åðåí÷åññå òñåññåå.

11

Êĩăö áëîêà ǫǻøǻíëÿ

[illegible]

À ðǎóǎíò x èǎǎò ñǎǎóó âíèç, àðǎóíǎíò t èǎǎò ñěǎǎà ìàíðǎâî

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 8.152 \times 10^{-3} & 0.015 & 0.023 & 0.028 & 0.028 & 0.03 \\ 0.809 & 0.734 & 0.668 & 0.611 & 0.561 & 0.517 & 0.48 \\ 0.915 & 0.875 & 0.836 & 0.799 & 0.764 & 0.731 & 0.701 \\ 0.819 & 0.814 & 0.807 & 0.798 & 0.789 & 0.779 & 0.769 \\ 0.692 & 0.711 & 0.728 & 0.744 & 0.757 & 0.769 & 0.779 \\ 0.645 & 0.685 & 0.722 & 0.754 & 0.783 & 0.807 & 0.828 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0.999 & 0.999 & 0.999 \end{pmatrix}$$

Dåðåleå ñååñõååle Mathcad lãññã òèè-àåòñý ò çàìõåðåìèðååí-
ññã, àèè èàè å ãñòðõåñüò óóëèèèýð Mathcad èññèèüçòðòñý áéåå ñèí-
æíúå è áéåå òí-íúå íàðíå.

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. –М.: Наука, 1975.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы –М.: Наука, 1987.
3. Береславский Э.Н., Павлов В.Д. Численные методы. Часть 1. Методы отыскания решений нелинейных уравнений: Учебное пособие/Университет ГА. С.-Петербург, 2006.
4. Береславский Э.Н., Леонтьева М.К. Численные методы. Часть 2. Методы отыскания решений систем нелинейных уравнений: Учебное пособие/Университет ГА. С.-Петербург, 2006.
5. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad 15. Учебный курс. - СПб: Питер, 2011.
6. Поршнева С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

Дополнительная литература

7. Милн. В.Э. Численный анализ. –М.: ИЛ, 1951.
8. Хаусхолдер А.С. Основы численного анализа. –М.: ИЛ, 1956.
9. Крылов В.И. приближенное вычисление интегралов. –М.: Физматгиз, 1959.
10. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения уравнений. –М.: Физматгиз, 1960.
11. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. –М.: Физматгиз, 1960.
12. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений. –М.: ГИФМЛ, 1962.
13. Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1962.

14. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. –М.: Физматгиз, 1962.
15. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. –М.: Наука, 1966.
16. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. –М.: Наука, 1966.
17. Самарский А.А. Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. –М.: Наука, 1973.
18. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. –М.: Наука, 1977.
19. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. –М.: Наука, 1978.
20. Никольский С.М. Квадратурные формулы. –М.: Наука, 1979.
21. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. –М.: Наука, 1980.
22. Форсайт Дж. и др. Машинные методы математических вычислений. –М.: Мир, 1980.
23. Волков Е.А. Численные методы. –М.: Наука, 1982.
24. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука, 1982.

Литература по применению Mathcad

25. Алексеев Е.Р., Чесноков О.В. Mathcad 12. - М.: NT Press, 2005.
26. Алексеев Е.Р., Чесноков О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. - М.: NT Press, 2006.
27. Дьяконов В.П. MATHCAD 2000. Учебный курс. - СПб: Питер, 2001.
28. Дьяконов В.П. MATHCAD 8/2000. Специальный справочник. - СПб: Питер, 2000.
29. Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Приложение 1. Требования к оформлению курсовой работы

Выполнение курсовой работы предусмотрено учебным планом дисциплины «Численные методы» и является завершающим этапом изучения указанной дисциплины.

Цель курсовой работы:

- систематизация и закрепление теоретических знаний и практических навыков по компьютерному моделированию типовых вычислительных алгоритмов и анализа полученной информации;
- выявление степени подготовленности студентов к самостоятельной работе в ходе решения поставленных задач.

При выполнении курсовой работы необходимо знание теоретического материала следующих тем:

- интерполирование (формула Ньютона, схема Эйткена, формула Лагранжа);
- эмпирические формулы (метод наименьших квадратов);
- решение нелинейных уравнений (методы итераций, хорд, касательных, комбинированный метод);
- численное интегрирование (формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона);
- решение обыкновенных дифференциальных уравнений (методы Эйлера-Коши и Рунге-Кутты);
- решение уравнений в частных производных (метод сеток для уравнений параболического типа),

а также владение материалом раздела Mathcad учебных дисциплин «Компьютерные системы символьной математики» и «Применение прикладных математических пакетов».

В ходе выполнения курсовой работы каждый студент должен изучить теоретический материал, решить задачи с применением указанных

вычислительных методов, в конце каждой темы сделать выводы. Задачи выбираются в соответствии с индивидуальным вариантом, который определяется двумя последними цифрами учебного шифра студента. Содержание задач и варианты заданий приведены в данном учебном пособии в конце каждого из разделов.

Вычисления в курсовой работе выполняется на ПК с использованием прикладной математической программы Mathcad. В приложении 2 приведен справочник по встроенным функциям Mathcad версий 14 и 15, используемым для реализации численных методов.

Содержание курсовой работы излагается в пояснительной записке, где указывается тема курсовой работы: «Применение численных методов к решению задач на базе ППП Mathcad» и номер варианта. Записка состоит из разделов, соответствующих темам теоретического материала дисциплины. Каждый раздел должен содержать название темы дисциплины, постановку задачи в соответствии с индивидуальным вариантом, описание метода решения задачи, расчетную часть, анализ полученных результатов и заключение о преимуществах и недостатках использования исследованных методов решения. В конце пояснительной записки указывается список использованной литературы.

Расчетная часть представляется в виде бумажных копий рабочих листов ППП Mathcad.

На титульном листе курсовой работы проставляется дата окончания работы и подпись автора.

При защите курсовой работы студент предоставляет вместе с отчетом электронную версию расчетной части работы.

Приложение 2. Встроенные функции Mathcad 14/15 для реализации численных методов

Mathcad содержит несколько сотен встроенных функций для решения различных задач, связанных с численными методами. В Приложении приведены справочные сведения по численным функциям Mathcad версии 15. Функции сгруппированы по разделам.

Если в Mathcad необходимо применить метод решения, отличающийся от встроенных, его придется программировать самостоятельно.

Вставка встроенных функций в документ Mathcad

Перед вставкой встроенной функции в документ необходимо поставить текстовый курсор (красный +) в позицию вставки.

Встроенную функцию можно ввести с клавиатуры или выбрать имя функции из диалога **Insert Function (Вставка функции)**, вызываемого командами меню **Insert / Function** или кнопкой  на панели инструментов. Пример диалога приведен на рис. 5.

Функции в окне диалога сгруппированы по категориям. В нижней части диалога содержится краткая справка по выбранной функции.

Кнопка в окне диалога **Вставка (Insert)** осуществляет вставку имени выбранной функции в указанное текстовым курсором место документа.

Кнопка в окне диалога **Справка ()** откроет окно справки **Mathcad Help** с детальным описанием функции. Пример справки по функции **root** приведен на рис. 6.

В нижней части окна **Mathcad Help** находится гиперссылка **QuickSheet** открывающая раздел примеров справочной системы Mathcad («шпаргалок»). Примеры можно копировать в свой документ через буфер Windows.

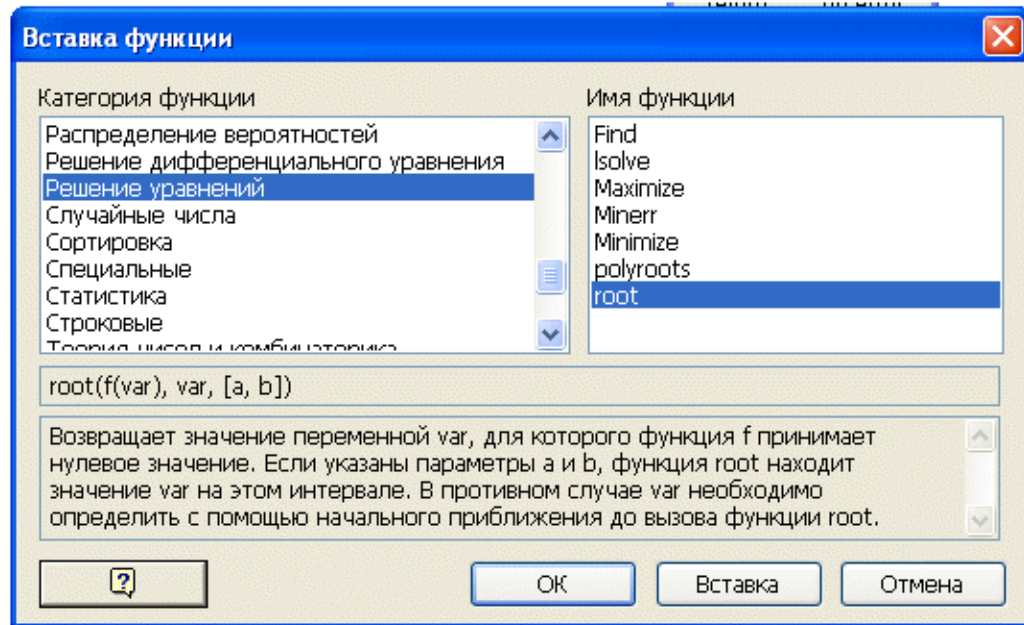


Рис.5 Диалог вставки функции в документ Mathcad

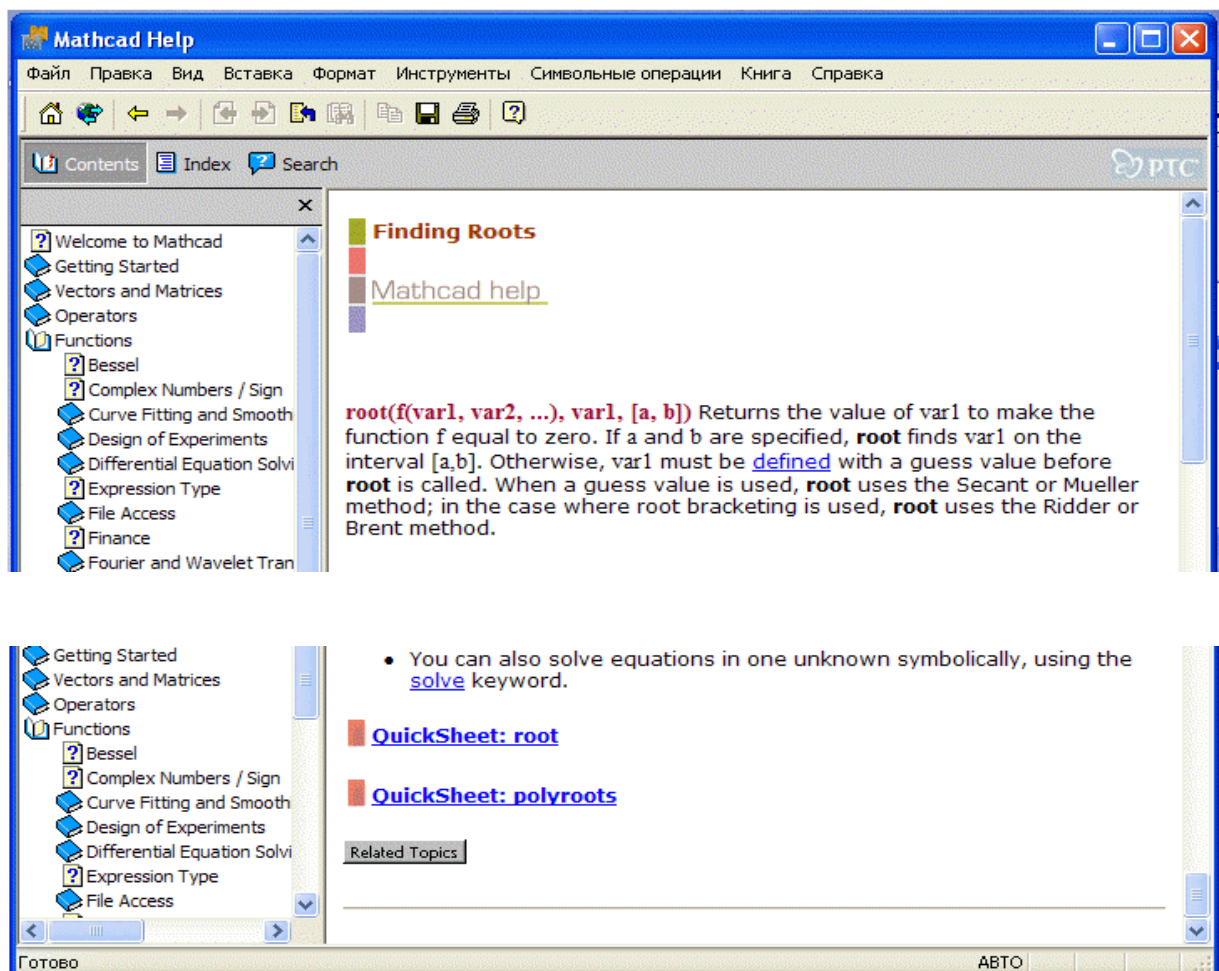


Рис.6 Верхняя и нижняя части окна Mathcad Help

Функции решения уравнений

Given ... Find(var1, var2, ...)

Возвращает значения переменных $var1$, $var2$, ..., представляющие решение системы уравнений в блоке решения Given. Если указан только один аргумент, возвращает скаляр, иначе возвращает вектор решений.

Isolve(M, v)

Возвращает вектор x , дающий решение линейной системы уравнений $M \cdot x = v$.

Given ... Maximize(f, var1, var2, ...)

Возвращает значения переменных $var1$, $var2$, ..., удовлетворяющие ограничениям в блоке решения Given и доставляющие наибольшее значение функции f . Возвращает скаляр, если задан один аргумент, иначе возвращает вектор решений.

Given ... Minerr(var1, var2, ...)

Возвращает значения переменных $var1$, $var2$, ..., наиболее удовлетворяющие системе уравнений и ограничениям в блоке решения Given. Возвращает скаляр, если задан один аргумент, иначе возвращает вектор решений. Если решение не сходится, возвращаются результаты последней итерации.

Given ... Minimize(f, var1, var2, ...)

Возвращает значения переменных $var1$, $var2$, ..., удовлетворяющие ограничениям в блоке решения Given и доставляющие наименьшее значение функции f . Возвращает скаляр, если указана одна переменная, иначе возвращает вектор решений.

polyroots(v)

Возвращает вектор, содержащий все корни многочлена, коэффициенты которого заданы параметром v . Щелкните эту функцию правой кнопкой мыши для выбора решателя.

root(f(var), var, [a, b])

Возвращает значение переменной *var*, для которого функция *f* принимает нулевое значение. Если указаны параметры *a* и *b*, функция *root* находит значение *var* на этом интервале. В противном случае *var* необходимо определить с помощью начального приближения до вызова функции *root*.

Функции решения дифференциальных уравнений**Given ... Odesolve(x, b, [intvls])**

Возвращает функцию аргумента *x* представляющую решение одиночного обыкновенного дифференциального уравнения (ODE) для области аргумента *x* от 0 до *b*. Уравнение и начальные условия записываются внутри блока решения. Необязательный параметр *intvls* задает число интервалов дискретизации для интерполяции решения (по умолчанию 1000).

Given ... Odesolve(vf, x, b, [intvls])

Возвращает вектор функций аргумента *x* представляющий решение системы дифференциальных уравнений для области аргумента *x* от 0 до *b*. Вектор *vf* задает имена искомых функций в системе уравнений. Уравнения и начальные условия записываются внутри блока решения. Необязательный параметр *intvls* задает число интервалов дискретизации для интерполяции решения (по умолчанию 1000).

Given ... Pdesolve(u, x, xrange, t, trange, [xpts], [tpts])

Возвращает вектор *u* функций аргументов *x* и *t*, представляющий решение системы дифференциальных уравнений в частных производных в блоке решения *Given* для областей дискретных значений аргументов *xrange* и *trange*.

Adams(y, x1, x2, intvls, D, [tol])

Возвращает матрицу значений решений дифференциального уравнения, заданного производными в *D* с начальными условиями *y* на интервале *[x1,x2]*, с использованием методов Адамса. Параметр *intvls* задает число строк матрицы результатов.

AdamsBDF(y, x1, x2, intvls, D, [J], [tol])

Возвращает матрицу значений решений дифференциального уравнения, заданного производными в D с начальными условиями y на интервале [x1,x2], с использованием методов BDF для жестких систем и методов Адамса для нежестких систем. Параметр intvls задает число строк матрицы результатов.

BDF(y, x1, x2, intvls, D, [J], [tol])

Возвращает матрицу значений решений для жесткого дифференциального уравнения, заданного производными в D с начальными условиями y на интервале [x1,x2], с использованием методов BDF. Параметр intvls задает число строк матрицы результатов.

Bulstoer(y, x1, x2, intvls, D)

Возвращает матрицу значений решений гладкого дифференциального уравнения, заданного производными в D с начальными условиями y на интервале [x1,x2] и методом Булирша — Штера. Параметр intvls задает число строк матрицы результатов.

bvalfit(v1, v2, x1, x2, xf, D, load1, load2, score)

Возвращает вектор начальных условий для граничной задачи, заданной производными в D, где решение известно в промежуточной точке xf.

multigrid(M, ncycle)

Возвращает квадратную матрицу решения дифференциального уравнения в частных производных Пуассона для нулевых граничных условий с числом циклов ncycle. Если граничные условия не нулевые, используйте функцию relax.

**numol(x_endpts, xpts, t_endpts, tpts, num_pde, num_pae,
pde_func, pinit, bc_func)**

Возвращает матрицу размером xpts на tpts, содержащую решения одномерных ДУЧП в pde_func. Каждый столбец представляет решение на одномерной области на один момент времени решения. Для системы уравнений

решение для каждой функции добавляется по горизонтали, поэтому матрица всегда содержит $xpts$ строк и $tpts * (num_pde + num_pae)$ столбцов.

Radau(y, x1, x2, intvls, D, [J], [M], [tol])

Возвращает матрицу значений решений жесткого дифференциального уравнения, заданного производными в D , и начальными условиями y на интервале $[x1, x2]$, с использованием метода RADAU5. Параметр $intvls$ задает число строк матрицы результатов.

relax(A, B, C, D, E, F, U, rjac)

Возвращает квадратную матрицу значений решения уравнения Пуассона для исходной функции F . Матрицы A , B , C , D и E задают коэффициенты для линейно аппроксимирующего лапласиана. Матрица U задает граничные значения по краям. Если они нулевые, используйте функцию `multigrid`.

Rkadapt(y, x1, x2, intvls, D)

Возвращает матрицу значений решения дифференциального уравнения, заданного производными в D и начальными условиями y на интервале $[x1, x2]$, с использованием метода Рунге — Кутты с переменным шагом. Параметр $intvls$ задает число строк матрицы результатов.

rkfixed(y, x1, x2, intvls, D)

Возвращает матрицу значений решений дифференциального уравнения, заданного производными в D и начальными условиями y на интервале $[x1, x2]$, с использованием метода Рунге — Кутты с постоянным шагом. Параметр $intvls$ задает число строк матрицы результатов.

sbval(v, x1, x2, D, load, score)

Возвращает набор начальных условий для граничной задачи, заданной производными в D и начальными приближениями v на интервале $[x1, x2]$. Параметр `load` содержит и известные начальные условия, и начальные приближения из V , а параметр `score` измеряет расхождение решения в $x2$.

statespace(init, t1, t2, intvls, A, [B], [u])

Возвращает решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Stiffb(y, x1, x2, intvls, D, AJ)

Возвращает матрицу решений жесткого дифференциального уравнения, заданного производными в D, расширенной функцией Якоби AJ и начальными условиями y на интервале [x1,x2], с использованием метода Булирша — Штера. Параметр intvls задает число строк матрицы результатов.

Stiffrr(y, x1, x2, intvls, D, AJ)

Возвращает матрицу значений решений жесткого дифференциального уравнения, заданного производными в D, расширенной функцией Якоби AJ и начальными условиями y на интервале [x1,x2], с использованием метода Розенброка. Параметр intvls задает число строк матрицы результатов.

Функции аппроксимации**expfit(vx, vy, [vg])**

Возвращает вектор, содержащий три коэффициента экспоненциальной кривой вида $a \cdot e^{b \cdot x} + c$, которая наилучшим образом аппроксимирует данные в векторах vx и vy. Необязательный вектор vg содержит начальное приближение для этих трех коэффициентов.

genfit(vx, vy, vg, F)

Возвращает вектор параметров, обеспечивающих наилучшее приближение первой функции в векторе F к данным в векторах vx и vy. Остальные элементы вектора F являются частными производными аппроксимирующей функции по ее n параметрам, а vg — это вектор начальных приближений. Щелкните функцию правой кнопкой мыши для выбора решателя.

intercept(vx, vy)

Возвращает отрезок прямой с наилучшим приближением к данным в vx и vy.

interpolate(v, n)

Возвращает интерполированную версию вектора V , содержащую в n раз больше элементов, чем V .

lgsfit(vx, vy, vg)

Возвращает вектор, содержащий 3 коэффициента логистической кривой вида $a/(1+b \cdot e^{-c \cdot x})$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в векторах VX и VY с использованием VG как вектора начального приближения.

line(vx, vy)

Возвращает вектор, содержащий коэффициенты уравнения прямой вида $a + b \cdot x$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в векторах VX и VY .

linfit(vx, vy, F)

Возвращает вектор, содержащий коэффициенты линейной комбинации функций в векторе F , наилучшим образом аппроксимирующей данные в VX и VY .

lnfit(vx, vy)

Возвращает вектор, содержащий 2 коэффициента логарифмической кривой вида $a \cdot \ln(x) + b$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в VX и VY .

loess(vx, vy, span)

Возвращает вектор, используемый функцией `interp` для поиска множества многочленов второго порядка, наилучшим образом приближающих значения данных в векторах или матрицах VX и VY в некоторой окрестности. Размер окрестности задается аргументом `span`.

logfit(vx, vy, vg)

Возвращает вектор, содержащий три коэффициента логарифмической кривой вида $a \cdot \ln(x+b)+c$, которая наилучшим образом аппроксимирует данные в векторах VX и VY . Вектор VG содержит начальные приближения для этих трех коэффициентов.

medfit(vx, vy)

Возвращает вектор, содержащий коэффициенты уравнения прямой вида $a + bx$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в векторах vx и vy с использованием медиан-медианной регрессии.

pwrfit(vx, vy, vg)

Возвращает вектор, содержащий коэффициенты кривой вида $a \cdot x^b + c$, которая наилучшим образом аппроксимирует данные в векторах vx и vy . Вектор vg содержит начальные приближения для этих трех коэффициентов.

regress(vx, vy, n)

Возвращает вектор коэффициентов для многомерной аппроксимации многочленом n -й степени по методу наименьших квадратов данных в vx и vy . Этот вектор становится первым аргументом функции `interp`.

sinfit(vx, vy, vg)

Возвращает вектор, содержащий коэффициенты синусоиды вида $a \cdot \sin(x + b) + c$, наилучшим образом аппроксимирующей данные в векторах vx и vy . Вектор vg содержит начальные приближения для этих трех коэффициентов.

slope(vx, vy)

Возвращает наклон прямой, наилучшим образом приближающейся к данным в vx и vy .

stderr(vx, vy)

Возвращает среднеквадратическую ошибку, связанную с линейной регрессией для точек, описанных векторами vx и vy . Измеряет разброс данных относительно линии регрессии.

Функции сглаживания и прогнозирования**expsmooth(v, a)**

Возвращает сглаженную версию данных из массива v , полученную в результате экспоненциального сглаживания с весом a .

ksmooth(vx, vy, b)

Возвращает вектор локальных взвешенных средних значений от vy с использованием гауссова ядра с полосой пропускания b .

medsmooth(vy, n)

Возвращает сглаженный вектор, заменяя каждое значение в vy медианой n точек с центром на этом значении.

movavg(v, n)

Возвращает сглаженные данные в массиве v , к которому применяется скользящее среднее в окне ширины n .

supsmooth(vx, vy)

Возвращает вектор, полученный в результате выборочного симметричного линейного сглаживания по ближайшим соседям методом наименьших квадратов по каждому элементу в vy с адаптивным выбором числа ближайших соседей.

resample(v, m, n)

Возвращает вектор, полученный из v путем n -кратной интерполяции и последующей выборки каждого m -го элемента.

predict(v, m, n)

Возвращает вектор из n прогнозируемых значений, следующих за последним элементом вектора v . При вычислении используются коэффициенты автокорреляции m последовательных значений в скользящем окне.

Функции анализа данных**Bicubic2D(vx, vy, Z, p, q)**

Выполняет интерполяцию между 2D-значениями в матрице Z для точек vx и vy с промежуточной точкой (p, q) .

Binterp(x, b)

Выполняет интерполяцию результатов **b** из функции **Spline2 (b)** в точке **x**; возвращает также первую, вторую и третью производные.

polycoeff(vx, vy)

Возвращает коэффициенты функции интерполяционного многочлена.

polyint(vx, vy, x)

Возвращает интерполированное значение в точке **x**, полученное с использованием функции многочлена, и предполагаемую погрешность.

polyiter(vx, vy, x, N, e)

Возвращает интерполированное значение в точке **x**, полученное с использованием функции многочлена с максимальным порядком **N** и максимальной погрешностью **e**. Возвращает также вычисленную погрешность и определяет, выполнено ли приближение функции.

rationalint(vx, vy, x)

Возвращает интерполированное значение в точке **x**, полученное с помощью рациональных функций, и предполагаемую погрешность.

Spline2(vx, vy, n, [vw], [u], [level])

Возвращает оптимальный набор узлов В-сплайна порядка **n** для интерполяции данных **VX** и **VY** с дополнительными весовыми коэффициентами **VW**, дополнительными узлами **U** и дополнительным уровнем отбраковки. Выходные данные используются в функции **Binterp**.

Thiele(vx, coeff, x)

Возвращает интерполированное значение **y** для вещественного скаляра **x**, используя точки данных **VX** и коэффициенты, возвращенные функцией **Thielecoeff**.

Thielecoeff(vx,vy)

Возвращает коэффициенты в виде непрерывных дробей для векторов **VX** и **VY**.

Редактор и корректор

Подписано к печати . .2014 г. Формат бумаги

Тираж . Уч-изд.л. Усл.печ.л С Заказ

Тип. Университета ГА. 196210. С_Петербург, ул.Пилотов, дом 38.